

Rapport de stage

# **Liquidation optimale de portefeuille**

Thomas Jannaud

Ecole Polytechnique - DEA Probabilités et Applications Paris VI

*Confidentiel*

18 septembre 2009

# Table des matières

Table des matières	1
Résumé	3
Introduction	5
<b>1 Principe d'un algorithme de liquidation</b>	<b>7</b>
1.1 Résolution du problème de liquidation dans un cadre statique . . . . .	7
1.1.1 Définitions et notations . . . . .	7
1.1.2 Modélisation de la dynamique des prix . . . . .	8
1.1.3 Calculs de coût du trading . . . . .	10
1.1.4 Résolution du problème dans un cas particulier . . . . .	10
1.2 Frontière efficiente, résolution sous contrainte . . . . .	12
1.2.1 Résolution explicite de stratégie optimale . . . . .	13
1.2.2 Résultats . . . . .	15
1.2.3 Avantages et inconvénients du modèle . . . . .	17
1.3 Optimisation distante . . . . .	18
<b>2 Etude de l'impact</b>	<b>19</b>
2.1 Particularités japonaises . . . . .	19
2.1.1 Ouverture et fermeture du marché . . . . .	19
2.1.2 Gestion du flot continu . . . . .	20
2.1.3 Mouvement maximal intra-jour du prix d'un nom . . . . .	20
2.1.4 Taille du tick . . . . .	22
2.1.5 Funari . . . . .	23
2.2 Mesure empirique de l'impact . . . . .	23
2.3 Le spread . . . . .	25
2.4 Le modèle . . . . .	26

---

<b>3</b>	<b>Couverture optimale d'un portefeuille</b>	<b>29</b>
3.1	Introduction d'un hedge optimal . . . . .	29
3.2	Instruments . . . . .	30
3.3	Démarche retenue . . . . .	33
3.4	Méthode de la tangente . . . . .	34
3.5	Conclusion . . . . .	36
<b>4</b>	<b>La liquidation en pratique</b>	<b>37</b>
4.1	Cahier des charges d'une liquidation . . . . .	37
4.2	Sommaire de l'algorithme . . . . .	38
4.3	Tests en marché simulé . . . . .	39
4.4	Quelques résultats . . . . .	39
	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Résolution du baikai d'ouverture</b>	<b>45</b>
A.1	Exemple . . . . .	45
A.2	Contre-exemple . . . . .	47
<b>B</b>	<b>Mouvement maximal autorisé</b>	<b>49</b>
<b>C</b>	<b>Taille de tick</b>	<b>51</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>52</b>

# Résumé

Ce document constitue le rapport final de mon stage quantitatif au sein de l'équipe de Trading Statistique et Automatique chez Barclays Capital Tokyo. L'équipe a trois objectifs différents : fournir et maintenir des algorithmes de trading automatiques pour les clients, pour la salle de marché et également pour le compte propre de la firme. Ces différentes stratégies tournent sur une plateforme automatique et écoutent le marché en temps réel.

Pendant ce stage j'ai travaillé sur plusieurs projets dont le déploiement d'une stratégie de liquidation automatique d'un portefeuille sur le marché japonais. Ce problème de liquidation est fondamental dans des marchés imparfaits où les coûts de transaction peuvent souvent réduire significativement les gains générés par un investissement ou augmenter les pertes. Typiquement, un investisseur désirant liquider sa position sur un certain actif à un moment donné se voit confronté à un choix entre la rapidité de l'exécution - qui lui donne une certitude sur le prix de transaction - et l'exécution plus lente qui limite son impact dans le marché, mais augmente son risque.

Il s'agit donc d'optimiser l'exécution d'un ordre d'achat ou de vente d'une action ou d'un portefeuille afin de minimiser les coûts tout en gardant une variance "raisonnable".

Dans une première partie, on passera en revue des modèles d'exécution, dans une deuxième partie, on étudiera plus finement l'impact de l'exécution d'un ordre sur le marché. Et puis finalement, on présentera l'algorithme de la liquidation, avec ses propriétés souhaitables.



# Introduction

Etant donné un gros portefeuille d'actions que l'on veut liquider, il s'agit pour nous de résoudre le problème suivant : comment le liquider en minimisant les coûts d'exécution tout en ayant un risque raisonnable ? Dans un marché, le prix résulte de l'équilibre de l'offre et de la demande. En exécutant les ordres, cet équilibre se déplace contre nous : à l'achat on vient peser du côté de la demande ce qui fait monter les prix, et à la vente, les prix baissent. Une solution naturelle serait d'exécuter très lentement pour limiter l'impact sur le marché. Mais dans ce cas, en augmentant la durée du trading, on s'expose à un risque en variance qui augmente en fonction du temps et de l'incertitude sur le prix d'exécution.

Dans ce contexte, il s'agit d'automatiser ce processus et d'implémenter une stratégie de liquidation automatique qui reçoit des ordres d'exécution aussi bien à l'achat qu'à la vente. Grâce à un jeu de paramètres, l'utilisateur définit son aversion au risque, et le comportement de la stratégie.

Dans un premier temps, il s'agit de trouver le bon modèle. Dans un deuxième temps, il s'agit de définir l'aversion au risque. Pour une transaction donnée et un utilisateur donné, on peut définir un niveau de risque maximal. Le problème est que les quantités à liquider sont inconnues a priori. De plus, si plusieurs utilisateurs envoient des ordres similaires pendant un laps de temps assez court, la stratégie doit être capable de reconnaître ce signal comme une position toxique et de liquider activement cette position. Dans un troisième temps, il s'agit de déployer la stratégie et de la tester dans un marché simulé afin de tester son comportement et de valider son cahier des charges.

Ce rapport sera donc divisé en quatre parties. On regardera un exemple de modèle

---

d'exécution statique, simple mais qui va nous donner des intuitions pour la suite. La deuxième partie va être consacrée à l'étude de l'impact d'une exécution dans le marché. La troisième partie sera consacrée au problème de la couverture optimale qui participe à un processus de liquidation. La quatrième partie sera consacrée aux résultats, à des exemples d'exécutions.

# 1 Principe d'un algorithme de liquidation

Dans un problème de liquidation, nous avons identifié deux risques principaux :

- Risque d'impact
- Risque de variance

Notre problème est donc le suivant : partant d'un portefeuille  $\pi_0$  de composition initiale  $\sum_{i \in I} n_i S_i$ , il s'agit de trouver une stratégie qui nous amène à un portefeuille  $\pi_f$  de composition  $\sum_{i \in I} n'_i S_i$ . On peut adapter deux points de vue :

- un point de vue **statique** qui consiste à définir à l'instant 0 la stratégie d'exécution
- un point de vue **dynamique** qui au vu des informations à l'instant  $t - 1$  réajuste la composition du portefeuille à l'instant  $t$ .

Dans la suite, nous commencerons par la résolution de notre problème dans un cadre statique.

## 1.1 Résolution du problème de liquidation dans un cadre statique

### 1.1.1 Définitions et notations

Tout d'abord, il faut préciser notre cadre : Il s'agit de décider pour un portefeuille donné à l'instant 0, la stratégie de trading qui l'amènera à un portefeuille final. Cette stratégie ne dépend pas des conditions futures du marché, mais dépend seulement de l'aversion au risque de l'utilisateur. Dans ce cadre, on peut donc prévoir le comportement de l'automate et garantir à l'utilisateur le comportement souhaité. Bien sûr, ce choix soulève des critiques mais nous y reviendrons à la fin de cette partie.

Cette partie est basée essentiellement sur l'article d'Almgren et Chriss dont on adoptera les notations.



Pour pouvoir mener à bien tous nos calculs, on va résoudre le problème pour une seule action.

Supposons que nous possédions  $X$  actions à l'instant  $t = 0$  que nous voulons liquider avant un temps  $T$ . On divise  $T$  en plusieurs intervalles  $\tau_1 \dots \tau_N$ , et quitte à considérer une subdivision plus fine, on peut toujours supposer notre subdivision régulière. On posera donc  $\tau = T/N$ , et aussi  $t_k = k\tau$ . On l'appellera *trajectoire de trading* la donnée de  $x_0, x_1, \dots, x_N$ . Typiquement  $x_0 = X$  et  $x_N = 0$ <sup>1</sup>. On peut aussi définir la stratégie de façon équivalente par la donnée des quantités traitées entre deux instants. Plus précisément, on pose  $n_1, n_2, \dots, n_N$  tel que  $n_i = x_{i-1} - x_i$  corresponde à la quantité traitée entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$ . On a la relation suivante entre  $n_k$  et  $x_k$

$$\forall k \in [0, N] \quad x_k = X - \sum_{j=1}^k n_j = \sum_{j=k+1}^N n_j$$

Dans la suite, on référera à la stratégie  $S$  indifféremment par  $x_i$  ou des  $n_j$ .

### 1.1.2 Modélisation de la dynamique des prix

Etant donné le prix initial de l'action  $S_0$ , l'évolution future du prix de l'action dépend non seulement de son drift, de sa volatilité mais aussi de notre impact dans le marché. On suppose alors que la volatilité et le drift ne sont pas dus à notre trading mais à l'équilibre général du marché. On fera la distinction entre deux types d'impact :

- impact *temporaire* qui est du à notre présence sur le marché, et qui crée un déséquilibre temporaire entre l'offre et la demande.
- impact *permanent* qui est un décalage persistant dans le temps des prix même après toute la durée du trading

---

<sup>1</sup>En pratique  $X_N$  n'est pas égal 0, on se donne en effet un seuil en pourcentage de l'ADV (average daily volume), que l'on veut maintenir si jamais l'on reçoit un ordre opposé au notre et que l'on peut satisfaire sans exécution.

## 1.1 Résolution du problème de liquidation dans un cadre statique



FIG. 1.1 – Illustration d’impact temporaire et d’impact permanent

Le modèle que l’on va considérer est une marche aléatoire et plus exactement :

$$(1.1) \quad S_k = S_{k-1} + \sigma\tau^{\frac{1}{2}}\xi_k - \tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right)$$

où  $\sigma$  est la volatilité, les  $\xi_k$  sont des variables aléatoires indépendantes centrées et de variance 1, représentant des chocs.  $g$  est la fonction qui va naturellement dépendre de la moyenne de trading entre  $t_{k-1}$  et  $t_k$ . Dans l’équation (1.1), nous n’avons pas de terme de drift, c’est à dire qu’on suppose que l’on a pas de vue sur le stock. ( $\alpha = 0$ ) Maintenant on enrichira notre modèle en tenant compte des déséquilibres temporaires entre offre et demande dus à notre présence, en introduisant une fonction  $h$  qui va aussi dépendre de la fréquence de trading  $\frac{n_k}{\tau}$ , mais cet impact va être présent uniquement pendant l’instant  $t_{k-1}$  et  $t_k$ , soit donc finalement, en notant  $\tilde{S}$  le prix actuel du stock,

$$(1.2) \quad \tilde{S}_k = S_{k-1} - h\left(\frac{n_k}{\tau}\right)$$

Si l’on pose  $\nu_k = \frac{n_k}{\tau}$  qui intuitivement représente la moyenne de trading sur une tranche de temps, il vient que  $h(\nu)$  et  $g(\nu)$  seront dépendantes de la microstructure du marché en toute généralité. On exigera par la suite d’autres conditions techniques pour aboutir à une formule fermée.

### 1.1.3 Calculs de coût du trading

On s'intéresse maintenant au profit généré en adaptant une certaine stratégie  $n_1, \dots, n_N$ . En combinant (1.1) et (1.2), il vient que

$$(1.3) \quad \sum_{k=1}^N n_k \widetilde{S}_k = \underbrace{XS_0}_{\text{Valeur initiale}} + \sum_{k=1}^N \left( \underbrace{\sigma\tau^{\frac{1}{2}}\xi_k}_{\text{variance}} - \underbrace{\tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right)}_{\text{I.permanent}} \right) x_k - \sum_{k=1}^N \underbrace{n_k h\left(\frac{n_k}{\tau}\right)}_{\text{I.temporaire}}$$

Le coût  $\mathcal{C}$  va être égal à  $XS_0 - \sum_k n_k \widetilde{S}_k$ , qui est une v.a. On s'intéresse donc à sa moyenne et à sa variance. On déduit de nos hypothèses que :

$$(1.4) \quad \mathbb{E}(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^N \tau x_k g\left(\frac{n_k}{\tau}\right) + \sum_{k=1}^N n_k h\left(\frac{n_k}{\tau}\right)$$

$$(1.5) \quad \mathbb{V}(\mathcal{C}) = \sigma^2 \sum_{k=1}^N \tau x_k^2$$

Dans la suite, il s'agit de trouver les trajectoires  $x_k$  ou  $n_k$  optimales.

### 1.1.4 Résolution du problème dans un cas particulier

On se propose maintenant de résoudre les équations dans un cas particulier où l'on prend toutes les fonctions d'impact linéaires et les chocs gaussiens. Cette dernière hypothèse est réaliste si  $N$  est grand. On pose alors

$$g(\nu) = \gamma\nu$$

On obtient alors :

$$(1.6) \quad S_k = S_0 + \sigma \sum_{j=1}^k \tau^{1/2} \xi_j - \gamma(X - x_k)$$

Après une sommation d'Abel, on obtient une expression plus simplifiée du terme d'impact permanent :

## 1.1 Résolution du problème de liquidation dans un cadre statique

---

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N \tau x_k g\left(\frac{n_k}{\tau}\right) &= \gamma \sum_{k=1}^N x_k n_k \\
 &= \gamma \sum_{k=1}^N x_k (x_{k-1} - x_k) \\
 &= \frac{1}{2} \gamma \sum_{k=1}^N (x_{k-1}^2 - x_k^2 - (x_k - x_{k-1})^2) \\
 &= \frac{1}{2} \gamma X^2 - \frac{1}{2} \gamma \sum_{k=1}^N n_k^2
 \end{aligned}$$

De la même façon, on prendra une fonction d'impact temporaire linéaire en son argument,

$$(1.7) \quad h\left(\frac{n_k}{\tau}\right) = \varepsilon \operatorname{sgn}(n_k) + \frac{\eta}{\tau} n_k$$

La nature financière de  $\varepsilon$  se trouve dans les frais de transactions (le *mid-spread*). Par contre,  $\eta$  dépend de la microstructure du marché. On reviendra sur cette hypothèse par la suite. Ce modèle s'appelle le modèle quadratique. En effet, vendre  $n$  unité en une seule unité de temps va avoir un coût de

$$nh\left(\frac{n}{\tau}\right) = \varepsilon |n| + \frac{\eta}{\tau} n^2$$

En combinant (1.6) et (1.7), on aboutit à l'expression suivante de l'**espérance** des coûts d'impacts

$$(1.8) \quad \mathbb{E}(x) = \frac{1}{2} \gamma X^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^N |n_k| + \frac{\tilde{\eta}}{\tau} \sum_{k=1}^N n_k^2$$

où

$$\tilde{\eta} = \eta - \frac{1}{2} \gamma \tau$$

Dès que  $\tilde{\eta} > 0$ , on se trouve dans un cadre d'optimisation d'une fonction convexe.

Le minimum de (1.8) est atteint dans le cas où l'on vend régulièrement la même quantité  $\frac{X}{N}$ , dans ce cas  $n_k = \frac{X}{N}$  et  $x_k = (N - k)\frac{X}{N}$ . On réécrit l'équation (1.8) pour obtenir

$$(1.9) \quad \mathbb{E}(x) = \frac{1}{2}XTg\left(\frac{X}{T}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right) + Xh\left(\frac{X}{T}\right)$$

$$(1.10) \quad = \frac{1}{2}\gamma X^2 + \varepsilon X + \tilde{\eta}\frac{X^2}{T}$$

$$(1.11) \quad \mathbb{V} = \frac{1}{3}\sigma^2 X^2 T \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right)$$

Cette stratégie de trading minimise l'impact mais a une variance qui tend vers  $+\infty$  si  $T \rightarrow \infty$ .

Si maintenant, on veut minimiser la variance, il s'agit simplement de tout liquider à la première période, ce qui se traduit par

$$n_1 = X, \quad n_2 = \dots = n_N = 0$$

ce qui donne

$$(1.12) \quad \mathbb{E}(x) = Xh\left(\frac{X}{\tau}\right) = \varepsilon X + \eta\frac{X^2}{\tau}$$

$$(1.13) \quad \mathbb{V} = 0$$

Si  $N$  est grand, et donc  $\tau$  est petit, l'impact va tendre vers  $+\infty$ .

En bref, une stratégie de trading optimale devrait être un compromis entre les deux stratégies extrêmes ci dessus.

## 1.2 Frontière efficiente, résolution sous contrainte

Nous avons trouvé deux stratégies extrêmes qui résolvent le problème de liquidation. Cependant aucune des deux n'est acceptable puisque l'on s'expose à une variance infinie ou à un impact infini. On va donc résoudre le problème autrement.

On va se donner un niveau de variance  $V^*$  maximal et l'on va résoudre notre problème reformulé de la façon suivante

## 1.2 Frontière efficiente, résolution sous contrainte

---

$$\min_{x:V(x)\leq V^*} \mathbb{E}(x)$$

Une formulation équivalente serait de se donner un niveau de coût maximum et de résoudre le problème équivalent

$$\min_{x:\mathbb{E}(x)\leq es(x)^*} \mathbb{V}(x)$$

Introduisant un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , on se propose de résoudre le problème non contraint

$$(1.14) \quad \min \left( \mathbb{E}(x) + \lambda \mathbb{V}(x) \right)$$

Si  $\lambda > 0$ , alors notre fonctionnelle est convexe, et donc l'équation (1.14) admet une unique solution  $x^*(\lambda)$ . On appellera "frontière efficiente", l'ensemble des solutions optimales lorsque  $\lambda$  varie dans  $\mathbb{R}_+$ . On voit que ce paramètre mesure intuitivement l'aversion au risque, vu qu'il définit le poids que l'on souhaite mettre sur la variance. On verra par la suite les implications d'une telle formulation. On peut résoudre numériquement l'équation (1.14), s'agissant d'un problème d'optimisation convexe.

### 1.2.1 Résolution explicite de stratégie optimale

On va se replacer dans le même cadre que précédemment, et choisir des fonctions d'impact linéaires. Ceci nous permet d'avoir des solutions fermées, ce que l'on exploitera dans la suite.

On se donne une fonction d'utilité  $\mathcal{U}$  que l'on écrit de la façon suivante,

$$(1.15) \quad \mathcal{U}(x) = \mathbb{E}x + \lambda \mathbb{V}(x)$$

Notre utilité est quadratique convexe si  $\lambda > 0$ , le minimum global existe et est solution de  $\mathcal{U}' = 0$ . On a en effet

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_k} = 2\tau \left( \lambda \sigma^2 x_k - \tilde{\eta} \frac{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}}{\tau^2} \right)$$

et ceci  $\forall k \in [1, N - 1]$  donc

$$(1.16) \quad \frac{1}{\tau^2} (x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}) = \tilde{\kappa} x_k$$

où

$$\tilde{\kappa}^2 = \frac{\lambda \sigma^2}{\tilde{\eta}}$$

L'équation (1.16) se résoud explicitement, en considérant l'équation caractéristique associée, on trouve alors les solutions suivantes :

$$(1.17) \quad x_j = \frac{\sinh(\kappa(T - t_j))}{\sinh(\kappa T)} X$$

où  $\kappa$  est solution de

$$\frac{2}{\tau^2} (\cosh(\kappa \tau) - 1) = \tilde{\kappa}^2$$

les quantités  $n_j$  traitées associées vérifient

$$(1.18) \quad n_j = \frac{2 \sinh(\frac{1}{2} \kappa \tau)}{\sinh(\kappa T)} \cosh(\kappa(T - (j - \frac{1}{2})\tau)) X, \quad j = 1, \dots, N$$

Pour un programme de liquidation, par exemple à la vente, on trouve bien des solutions monotones qui décroissent vers 0, en fonction du paramètre  $\kappa$ , ce qui n'était pas évident a priori.

Si  $\tau$  est petit, on a les approximations suivantes :

$$\kappa \sim \tilde{\kappa} + \mathcal{O}(\tau^2) \sim = \sqrt{\frac{\lambda \sigma^2}{\eta}} + \mathcal{O}(\tau)$$

Les coûts et la variance s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x) &= \frac{1}{2} \gamma X^2 + \varepsilon X + \tilde{\eta} X^2 \frac{\tanh(\frac{1}{2} \kappa \tau) (\tau \sinh(2\kappa T) + 2T \sinh(\kappa \tau))}{2\tau^2 \sinh^2(\kappa T)} \\ \mathbb{V}(x) &= \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\tau \sinh(\kappa \tau) \cosh(\kappa(T - \tau)) - T \sinh(\kappa \tau)}{\sinh^2(\kappa T) \sinh(\kappa \tau)} \end{aligned}$$

## 1.2 Frontière efficiente, résolution sous contrainte

---

Les équations obtenues dans (1.9) et (1.12) se retrouvent en faisant tendre  $\kappa$  vers 0, ( $\lambda = 0$ ) et vers  $\infty$ , ( $\lambda = \infty$ ).

### 1.2.2 Résultats

Nous avons tracé la frontière efficiente avec les paramètres suivants :

- $N = 27$ , sur une journée (4h30 de trading sans participer aux enchères d'ouverture et de clôture, on traite une fois toutes les 10 minutes).
- $T = 1$  jour
- $\tau = 0,03$
- $\sigma = 20\%$
- $\eta = 1\%$
- $\varepsilon = 22$  bps (c'est le spread moyen au Japon).
- $\gamma = 0,60$
- $X = 10$
- $\tilde{\eta} \sim \eta = 1\%$

Le paramètre  $\lambda$  (et donc  $\kappa$ ) est laissé libre ce qui nous permet d'avoir le graphe suivant.



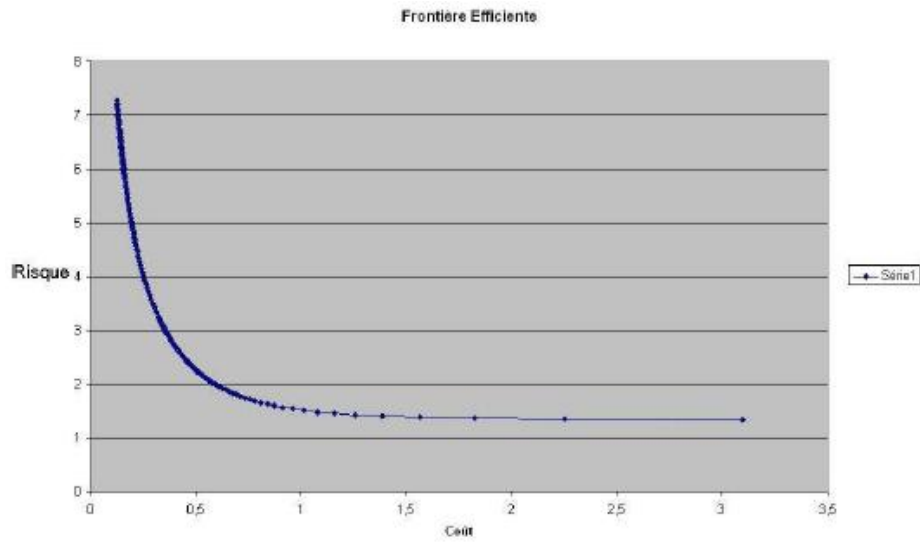


FIG. 1.2 – Frontière efficiente

On voit tout d'abord qu'au début, pour une augmentation faible des coûts, on réduit significativement la variance, puis on rentre dans une zone où l'augmentation des coûts ne réduit pratiquement plus la variance. Cette remarque va être utilisée par la suite.

Il s'agit maintenant de construire la trajectoire optimale pour une valeur de  $\lambda$  donnée.

## 1.2 Frontière efficiente, résolution sous contrainte

---

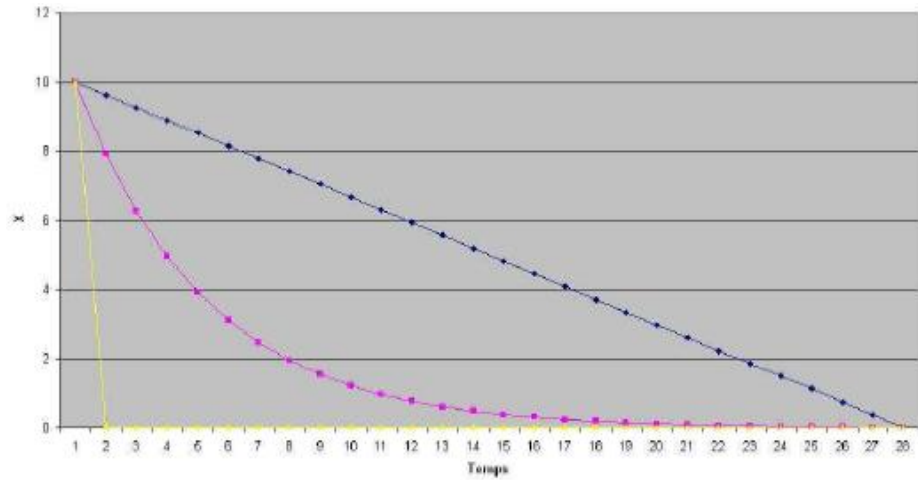


FIG. 1.3 – Trajectoires optimales pour différentes valeurs de  $\lambda$

Comme on pouvait s’y attendre, pour une faible valeur de  $\lambda$  ici  $1e-6$ , on tend vers une liquidation linéaire et uniforme. Pour une grande valeur de  $\lambda$  ( $1e6$ ), le chemin optimal serait de toute vendre dans la première période. Une valeur moyenne de  $\lambda$ , nous donne un profil intermédiaire :

### 1.2.3 Avantages et inconvénients du modèle

Ce modèle nous a permis de construire des solutions explicites pour l’exécution d’une quantité donnée d’une même action. Ce même modèle peut être enrichi en tenant compte de la corrélation, d’un drift d’un gros portefeuille. Avec une étude de la microstructure du marché, on peut calibrer les fonctions d’impact temporaire et permanent. De plus, ce modèle possède la propriété intéressante de stabilité des trajectoires optimales à conditions de marché égales. Si l’on construit la trajectoire en partant de  $X - \sum_{k=0}^l x_k$  la solution optimale est simplement  $x_{l+1}, \dots, x_N$ , ce qui n’est pas évident à priori.

Cependant ce modèle souffre d’un inconvénient majeur. L’optimisation étant statique, elle ne réagit pas aux nouvelles du marché : faible liquidité à un instant donné, ...

### 1.3 Optimisation distante

L'algorithme de liquidation doit être capable de recevoir des ordres en temps réel, de calculer des trajectoires optimales d'exécution, d'envoyer des ordres sur le marché, et de surveiller en continu l'évolution de ces ordres. Il est donc important que l'algorithme soit léger, et capable de calculer rapidement.

Nous avons donc choisi de déléguer la partie d'optimisation à un serveur distant qui possède un accès à toutes les données historiques et actuelles concernant tous les actifs tradables dans le monde, et qui soit capable de calculer "rapidement" une trajectoire optimale.

## 2 Etude de l'impact

Nous allons étudier dans cette partie l'impact dû à une exécution donnée sur le marché. A partir des observations empiriques, nous allons construire un modèle d'exécution dépendant de la micro-structure des marchés japonais. Pour cela, nous commencerons par passer en revue quelques particularités japonaises.

### 2.1 Particularités japonaises

Le TSE présente quelques particularités uniques que nous allons détailler ici, dans la mesure où certaines d'entre elles sont particulièrement importantes dans l'établissement d'une stratégie d'exécution, en prenant en compte la micro-structure du marché.

Des informations plus détaillées et chiffrées sont disponibles en annexe.

#### 2.1.1 Ouverture et fermeture du marché

Une journée sur le TSE (Tokyo Stock Exchange) commence avec une enchère de type "Itayose", et se termine de la même façon. On peut aussi placer des ordres limite et de marché "on close", qui ne seront activés que pour l'auction de close. Ces ordres ne sont pas "invisibles" aux acteurs du marché mais n'interviennent pas dans le flux continu.

Prenons l'exemple de l'ouverture : le prix d'ouverture satisfait aux conditions suivantes :

- Tous les ordres marché envoyés à l'ouverture sont exécutés
- Tous les ordres limite d'achat avec des prix supérieurs au prix d'ouverture sont exécutés, et de manière symétrique tous les ordres de vente avec des prix inférieurs au prix d'ouverture sont exécutés.
- Au moins un des deux côtés du carnet d'ordre ("baikai") d'ouverture, achat ou vente, est entièrement exécuté, et au moins un ordre limite de l'autre côté est exécuté

- Enfin, il n'est pas garanti qu'il subsiste, au moment de l'ouverture, de la liquidité des deux côtés : l'ask ou le bid peuvent être totalement vides. Si tel est le cas, le prix d'ouverture est fixé au prix du côté qui reste.

Il n'est bien sûr pas évident que l'on puisse toujours ouvrir un livre d'ordres avec cette méthode, et il arrive que certains noms n'ouvrent pas en même temps que le marché, un cas fréquent étant par exemple la non-satisfaction de la seconde partie de la troisième condition.

Une résolution de l'order book est donnée en exemple en annexe.

### 2.1.2 Gestion du flot continu

La méthode "Zaraba" ou la gestion du flot continu consiste à donner un prix d'exécution en temps réel. En permanence, les niveaux du bid et de l'ask sont tenus à jour en fonction des derniers ordres limite envoyés sur le marché. Il s'agit maintenant de savoir comment gérer l'interaction entre les ordres marché et les ordres limite. Celle-ci est assez simple : un ordre marché de vente par exemple, sera d'abord confronté à l'ordre limite se trouvant au bid depuis le plus longtemps. En termes de probabilités d'exécution d'un ordre, le temps passé sur le marché est un facteur primordial. L'ordre marché est alors exécuté, totalement ou partiellement. Si l'exécution n'est que partielle, il est ensuite confronté au second ordre qui attend depuis le plus longtemps au bid, et ainsi de suite jusqu'à ce que soit le volume présent au bid, soit l'ordre marché ait été entièrement exécuté. S'il reste encore un volume non-nul à exécuter "marché", le niveau suivant du baikai est attaqué, et ainsi de suite jusqu'à épuisement de la quantité "marché" ou du carnet d'ordres. Un des effets de cette méthode, en l'absence de market maker, est que l'arrivée d'un gros ordre marché dans un livre d'ordre "fin", c'est-à-dire ne comportant qu'un petit volume, va risquer de causer des grands mouvements soudains du prix de l'action considérée.

### 2.1.3 Mouvement maximal intra-jour du prix d'un nom

Une particularité remarquable du marché japonais est que des contraintes sont imposées sur le mouvement maximal du prix d'un nom donné.

## 2.1 Particularités japonaises

---

Sur le TSE en effet, un même titre ne peut pas voir son niveau de prix monter ou descendre de plus d'une certaine valeur par rapport à son précédent prix de fermeture : si un ordre marché trop gros par rapport au volume proposé dans le baikai arrive sur le marché, l'échange de ce titre est suspendu. On dit alors que le nom considéré est "limite haute" ou "limite basse", suivant le sens du mouvement. L'échange du titre peut éventuellement reprendre au cours de la journée si suffisamment d'ordres s'accumulent pour "contenir" le mouvement du prix du à l'ordre marché initialement reçu. Toutefois, il est assez fréquent que ce phénomène empêche de traiter le titre pour le restant de la journée. Une raison à cela est que si un titre est limite haute, il devrait il n'a pas réalisé toute sa "montée" et le titre devrait continuer de monter le lendemain. Il n'y a donc pas de raison de vendre à un prix de limite haute.

**Kehai** Dans un même ordre d'idées, la variation du prix d'un actif entre deux traites consécutives est également bornée, la distance des bornes au prix actuel de l'actif s'ajustant en fonction du niveau de prix. Si un gros ordre marché arrive dans un baikai ne fournissant que peu de liquidité, et même si cet ordre marché ne paraît pas devoir causer au prix le franchissement des limites "haute" ou "basse", si la variation de prix engendrée par l'exécution complète de cet ordre est plus grande que la variation autorisée sur une traite, le TSE émet un avertissement ou "Kehai" et suspend la traite du titre considéré pour cinq minutes. Ces 5 minutes passées, la barrière est reculée et la quantité restante du "gros ordre marché" attaque à nouveau le baikai. Si cela crée encore une trop grande variation, un nouveau Kehai est émis et le nom est suspendu encore minutes et ainsi de suite.

Il est à noter que ces événements sont assez peu fréquents, mais qu'ils sont des problèmes majeurs pour tout ce qui concerne les automates d'exécution, au sens où il y a toujours un risque d'emballement de l'algorithme si ces situations ne sont pas détectées correctement.

En moyenne, un titre ne peut pas varier de plus de 15 % sur une journée et de plus de 1.5 % en un trade. Un tableau donnant les variations maximales autorisées est disponible en annexe.

### 2.1.4 Taille du tick

En termes de micro-stratégie, la plus importante des spécificités ici détaillées est certainement la manière dont est fixée la taille d'un "tick" : nous désignerons ainsi la différence entre deux prix limite autorisés pour un titre donné à un instant donné ; en d'autres termes, c'est la taille de la fourchette minimale. Au sein du TSE, **cette taille dépend du prix courant de l'action considérée**. Ainsi un nom qui traite à un prix inférieur à 2000 yens aura-t-il un tick de 1 yen, un nom qui traite entre 2000 et 3000 yens, un tick de 5 yens,...

Cette particularité prend tout son sens dans la mesure où la taille de tick détermine le coût pour un trader d'envoyer un ordre limite plus compétitif que ceux qui sont déjà en place dans le *baikai* au moment où il place son ordre. Ainsi, si l'on raisonne en termes de coûts relatifs, considérons l'exemple d'une personne souhaitant acheter une action traitant à 1990 yens : placer un ordre à 1991 yen va lui coûter  $1/1990$  en plus du montant qu'il souhaitait investir, soit environ 5 bps (= 5 points de base = 5 centièmes de pourcent). Compte-tenu des différences de prix entre les différents titres traités sur le TSE, c'est en cette unité que seront mesurés tous les coûts liés à l'exécution d'une instruction. En revanche, une personne souhaitant acheter un titre dont le bid est coté à 2010 yens, devra déboursier 25 bps pour être plus compétitif. Le second trader sera donc beaucoup plus hésitant à placer un ordre plus compétitif que les autres, et aura tendance à se placer plus naturellement au bid existant déjà quand il arrive sur le marché.

Ceci va jouer un rôle très important dans le comportement du titre considéré : si le premier titre aura des mouvements très vifs et sera susceptible de bouger beaucoup au cours d'une journée, le second sera, lui, beaucoup plus statique. Comme de plus il n'est pas rare de voir un titre passer la frontière entre deux prix déterminant des tailles de tick différentes dans une même journée, il arrive assez souvent qu'un nom change radicalement de comportement plusieurs fois par jour, comme conséquence de cette discontinuité des coûts de transaction.

Un tableau donnant les tailles de tick est disponible en annexe. Au Japon, la taille de tick moyenne est de 15 bps, ce qui est plutôt supérieur aux autres pays

## 2.2 Mesure empirique de l'impact

---

### 2.1.5 Funari

Une dernière particularité remarquable est la possibilité, pour le trader, de placer en fin de journée des ordres de type "funari", à savoir des ordres limite qui se transforment en ordres marché à la fermeture du TSE (ordres "market on close"). Pour l'agent qui souhaite acheter un nom donné et qui a pris position à l'aide d'un ordre limite sur le marché, se pose donc en fin de journée la question de savoir s'il a intérêt à amender tout de suite son ordre vers un ordre marché, ou s'il a plutôt intérêt à le rendre funari, parce qu'il escompte un mouvement favorable du cours de l'action lors des opérations de fermeture.

En particulier, si l'on souhaite examiner notre performance d'exécution en nous basant sur le prix du marché à l'instant de notre entrée sur celui-ci, il peut être intéressant de voir, si nous n'avons toujours pas terminé l'exécution au moment de la fermeture, si nous aurions moins d'impact en envoyant un ordre marché lors de celle-ci, ou bien juste avant : il est en effet clair que minimiser notre impact de marché est capital dans ce type d'exercice. Or, s'il est relativement facile à la vue d'un livre d'ordre à un instant donné d'évaluer l'impact d'un ordre marché, il est en revanche beaucoup plus ardu de savoir en temps réel ce que serait notre impact lors de la fermeture du marché, dans la mesure où la plupart des ordres marché de la fermeture ne sont envoyés par les participants que quelques secondes avant la clôture pour éviter de se révéler. Pour répondre à de telles considérations, on peut se servir des données historiques évoquées plus tôt afin d'essayer d'appréhender quel aurait été notre impact en terme de prix de fermeture d'un titre donné, si nous avions envoyé une certaine quantité d'actions de ce nom en ordre funari : cette réponse statistique doit nous permettre de prendre la décision la mieux appropriée.

## 2.2 Mesure empirique de l'impact

On se propose dans cette partie de mesurer l'impact d'une exécution donnée. Pour cela, nous avons recueilli les ordres VWAP de la firme sur les deux mois récents, et nous avons généré toutes les données relatives au volume et au prix pour ces différents ordres. Nous avons découpé la durée de trading en pas de temps réguliers,



(ici 10%) et nous avons mesuré le rendement non signé du titre lors de la vie de l'ordre VWAP.

Un ordre VWAP (Volume Weighted Average Price) est un ordre qui essaie de s'approcher de la référence VWAP définie par

$$VWAP = \frac{\sum \text{Volumes} \times \text{Prix}}{\sum \text{Volumes}}$$

c'est le prix moyen du marché. En moyenne, voici les résultats que nous obtenons pour un actif qui vaudrait 100 au départ, en fonction de la participation dans le marché.

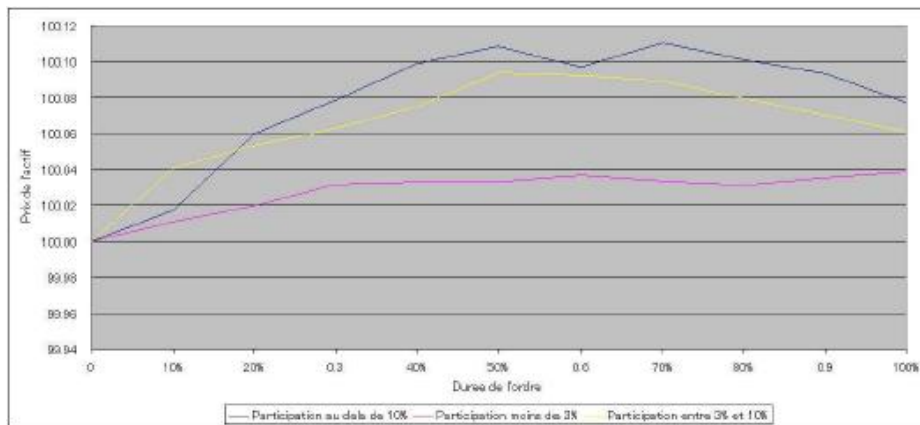


FIG. 2.1 – Impact permanent et temporaire sur le prix d'un actif

Plusieurs remarques s'imposent : d'abord, on voit que l'impact est d'autant plus important que la participation est grande. La taille de l'ordre rapportée à l'ADV sera donc probablement un paramètre du modèle.

De plus, on voit l'existence de deux types d'impact : un impact temporaire dû au déséquilibre créé par l'ordre dans le carnet d'ordre, et rétablit car le carnet d'ordre se remplit, et un impact permanent plus persistant, qui continue après la vie du trade. L'impact temporaire est moins visible si la participation est faible, ce qui est naturel. Avec une faible participation, l'ordre est invisible, et on peut retrouver de la liquidité. Plus la participation est grande, et plus il faut payer pour la liquidité.

## 2.3 Le spread

---

Avec une participation de 3% , l'impact permanent vaut 4 bps et un impact temporaire négligeable. Avec une participation plus importante (entre 3% et 10%), l'impact temporaire est de 3 bps alors que l'impact permanent est de 6 bps, et puis finalement pour une participation supérieure à 10% , on observe un impact permanent de 8 bps et un impact temporaire de 3 bps.

L'impact temporaire a été mesuré comme étant l'écart entre l'impact maximal sur la durée de vie du trade, et l'impact permanent = impact final.

## 2.3 Le spread

La taille du spread offre-demande permet aussi d'expliquer l'impact. Supposons par exemple un ordre d'achat placé à l'ask. Il s'agit d'un ordre agressif qui croise le spread pour être exécuté. Naturellement le prix monte d'un spread. Chaque ordre de la sorte impacterait le prix d'un spread. On s'attend donc à avoir le spread comme facteur explicatif de l'impact. Pour cela, avec les mêmes ordres considérés précédemment, on appelle impact la variation non signée entre le prix à l'instant 0 et le prix après 15 minutes. On trace alors cette variation en fonction du spread pour obtenir le graphique suivant :

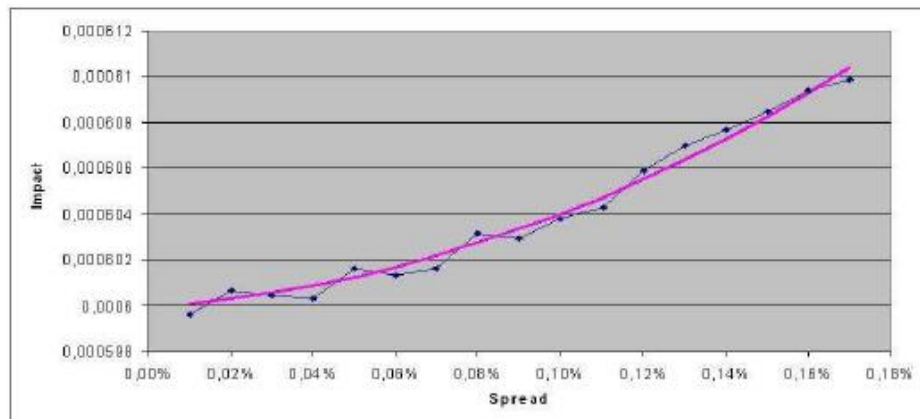


FIG. 2.2 – Impact en fonction du spread, approximation quadratique

Nous avons aussi représenté une approximation quadratique, qui est proche de la

courbe obtenue et incite donc à choisir un modèle quadratique en spread.

## 2.4 Le modèle

Nous avons choisi d'abandonner le modèle statique et de résoudre une optimisation sous contraintes de la même fonction d'utilité  $\mathcal{U}$  sous la forme suivante

$$\mathcal{U}(x) = \mathbb{E}x + \lambda\mathbb{V}(x)$$

mais pour un portefeuille entier. A l'arrivée de nouveaux ordres, on annule tous les ordres sur le marché, on recalcule les nouvelles positions et la composition optimale. Par contre, lors des exécutions, la composition n'est pas réajustée.

La résolution de ce problème devient complexe dans la mesure où l'on doit fournir pour chaque actif un temps optimal d'exécution ainsi que le profil de trading associé.

Afin de simplifier le problème, on décide d'exécuter linéairement chaque actif. Cette hypothèse permet de réduire le nombre d'inconnues dans la mesure où le nouveau problème se ramène à résoudre les temps  $T_i$  optimaux pour chaque actif.

Si on note  $T = (T_1, T_2, \dots, T_N)$ , le vecteur des temps optimaux, alors notre problème se reformule par

$$(2.1) \quad \min_T \mathcal{U} = \min_T (I(T) + \lambda\sqrt{\text{Var}(T)})$$

Le modèle choisi pour l'impact est interne à l'équipe. Il postule que l'impact est :

- fonction décroissante du temps
- fonction croissante de la participation ( $V/ADV$ )
- fonction croissante du spread

Quant à la partie variance, si l'on note  $\sigma_i$  l'écart type de l'actif  $i$ , et  $\sigma_{i,j} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$  la covariance entre l'actif  $i$  et l'actif  $j$ , pour passer d'un volume  $V_i^0$  à  $V_i^f$ , alors on peut calculer explicitement la variance pour passer de l'état initial à l'état final.

Notons  $T_{max}$  l'horizon maximal de liquidation, typiquement une journée de trading. Toujours avec l'hypothèse d'exécution linéaire, on a alors,

## 2.4 Le modèle

---

$$(2.2) \quad \mathbb{V}(T, i, j) = \int_0^{T_{max}} \sigma_{i,j} (V_i^f + (1 - \frac{t}{T_i})^+(V_i^0 - V_i^f)) (V_j^f + (1 - \frac{t}{T_j})^+(V_j^0 - V_j^f)) dt$$

On peut toujours supposer que  $T_i < T_j$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T, i, j) &= \int_0^{T_i} \sigma_{i,j} (V_i^f + (1 - \frac{t}{T_i})(V_i^0 - V_i^f)) (V_j^f + (1 - \frac{t}{T_j})^+(V_j^0 - V_j^f)) dt \\ &+ \int_{T_i}^{T_j} \sigma_{i,j} (V_i^f + (1 - \frac{t}{T_i})(V_i^0 - V_i^f)) (V_j^f + (1 - \frac{t}{T_j})(V_j^0 - V_j^f)) dt \\ &+ \int_{T_j}^{T_{max}} \sigma_{i,j} V_i^f V_j^f dt \end{aligned}$$

Pour le stock  $i$ , on a

$$(2.3) \quad \mathbb{V}(T, i) = \int_0^{T_i} \sigma_i^2 (V_i^f + (1 - \frac{t}{T_i})(V_i^0 - V_i^f))^2 dt + \int_{T_i}^{T_{max}} \sigma_i^2 V_i^f{}^2 dt$$

Remarquons que le terme en covariance est symétrique en  $i$  et  $j$ . On écrit alors :

$$\begin{aligned} Var(T, i, j) + Var(T, j, i) &= \frac{T_i \sigma_{i,j}}{3T_j} \left( (2V_i^f + V_i^0)T_i + 3(V_i^f + V_i^0)T_j V_j^0 \right) \\ &+ \frac{V_i^f \sigma_{i,j}}{T_j} \left( T_j^2 (V_j^f + V_j^0) - 2T_j V_j^0 T_i + T_i^2 (V_j^0 - V_j^f) \right) \\ &+ 2\sigma_{i,j} V_i^f V_j^f (T_{max} - T_j) \end{aligned}$$

Pour chaque actif, on a la relation :

$$Var(T, i) = \sigma_i^2 \frac{T_i}{3} \left( (V_i^0)^2 + V_i^0 V_i^f + (V_i^f)^2 \right) + (T_{max} - T_i) \sigma_i^2 (V_i^f)^2$$

Ces calculs sont délégués à un serveur distant qui est dédié entièrement à la résolution numérique du problème.



## 3 Couverture optimale d'un portefeuille

A l'échelle d'un desk de trading statistique, plusieurs stratégies tournent en permanence et si une stratégie souhaite liquider sa position, peut-être qu'une autre cherche à avoir une position opposée. Plutôt que de vendre des actions d'une part et d'en acheter d'autre part, on préfère croiser ("cross") mutuellement les ordres. Il est ainsi souvent choisi de ne pas liquider sa position entièrement, mais de liquider jusqu'à un certain niveau, défini par l'utilisateur, afin d'avoir un peu de "marge". La question qui s'est posée est comment allons-nous gérer le risque engendré par les positions que l'on garde. Nous allons utiliser des instruments de couvertures qui sont des contrats "Futures" sur indice pour gérer ce risque résiduel. Même si ces contrats sont très liquides en général, leur traite dans le marché est toujours coûteuse. Chercher une couverture optimale consiste donc à trouver une combinaison des instruments de hedge disponibles, qui réduit "assez" la variance, sans ajouter "trop" de coûts d'exécution. Ces deux objectifs sont concurrents, et il faut trouver un compromis : c'est ce que l'on appellera un hedge optimal.

### 3.1 Introduction d'un hedge optimal

Imaginons un client qui souhaite vendre 1 million d'actions Sony immédiatement. Il passe cet ordre à la liquidation, et considère que sa position est nulle. Au niveau du book de liquidation, la position était nulle et passe à longue de 1 Million d'actions Sony. L'exposition vis à vis du marché (ou le delta) est de l'ordre de 62 Millions de dollars. Avoir une telle position est bien sûr inacceptable. De plus, si on liquide cette position activement, l'impact sera très grand, et donc inacceptable également.

La solution est de réduire l'exposition vis à vis du marché par l'introduction d'un hedge, une combinaison optimale de futures (au Japon, le NIKKEI 225 et le TOPIX) puis liquider la position plus lentement.

En effet, l'introduction d'un tel hedge va réduire la variance mais va introduire

des coûts de transaction supplémentaires.

Nous ne cherchons pas à obtenir un hedge "parfait" ou  $\beta$  neutre. Un tel hedge nous obligerait à recalculer la position en continu. Les ordres sur le marché devraient être annulés puis renvoyés, ce qui serait visible par les autres acteurs. De plus un utilisateur accepte une variance limite, et ce hedge revient simplement à réduire la variance au delà de cette limite. Au niveau des coûts, il vient que la position optimale d'un instrument de hedge va être non-monotone. En effet, à la réception de l'ordre d'exécution, on cherche à avoir une position en hedge proche des ordres pour réduire le risque global du portefeuille. Puis au cours du temps, avec les exécutions, le risque diminue globalement, et notre hedge doit diminuer en conséquent.

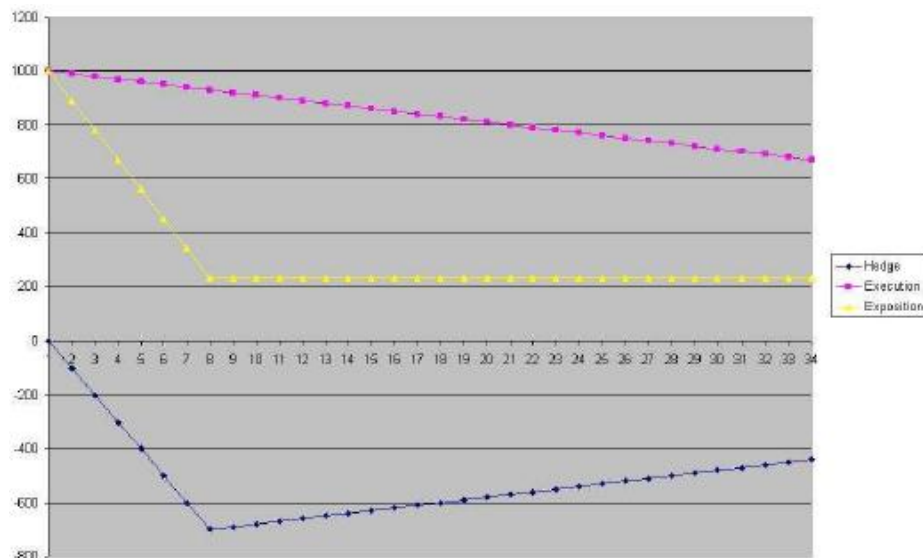


FIG. 3.1 – Exemple d'un profil de hedge

## 3.2 Instruments

Une façon de réduire la variance serait d'introduire des instruments de hedge, typiquement des futures sur indices. Sur le TSE (Tokyo Stock Exchange) l'indice de référence est le TOPIX (Tokyo Stock Price Index). Il existe plusieurs contrats TOPIX :

## 3.2 Instruments

---

- TOPIX 100 , grosses capitalisations.
- TOPIX 400 , moyennes capitalisations.
- TOPIX 500, petites capitalisations.

Le TOPIX que nous utilisons est le contrat TOPIX de base, qui est composé de 1600 noms environ. Cette composition est variable, et change assez souvent. Notons que les poids des composants du Topix sont proportionnels à la capitalisation.

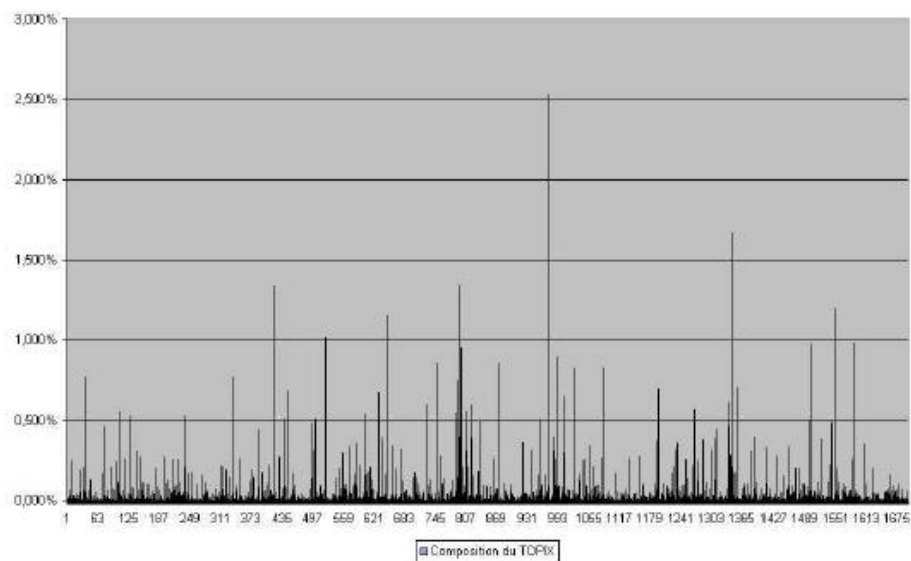


FIG. 3.2 – Le TOPIX

Comme on peut le voir, quelques 200 noms sont significatifs, remarquons aussi la présence de plusieurs noms à capitalisation moyenne ce qui le rend utile pour la couverture d'un portefeuille composé de tel noms.

Le deuxième instrument que nous utilisons est le contrat future sur NIKKEI. Le NIKKEI est l'indice de référence sur l'OSE (Osaka Stock Exchange). Il existe deux contrats NIKKEI,

- le Nikkei 225
- le Nikkei 300



C'est le Nikkei 225 que nous retiendrons. A l'inverse du Topix, le Nikkei est à composition unitaire : sauf pour quelques exceptions, si le prix d'une unité est très élevé ou très faible, chaque nom a un poids de 1.

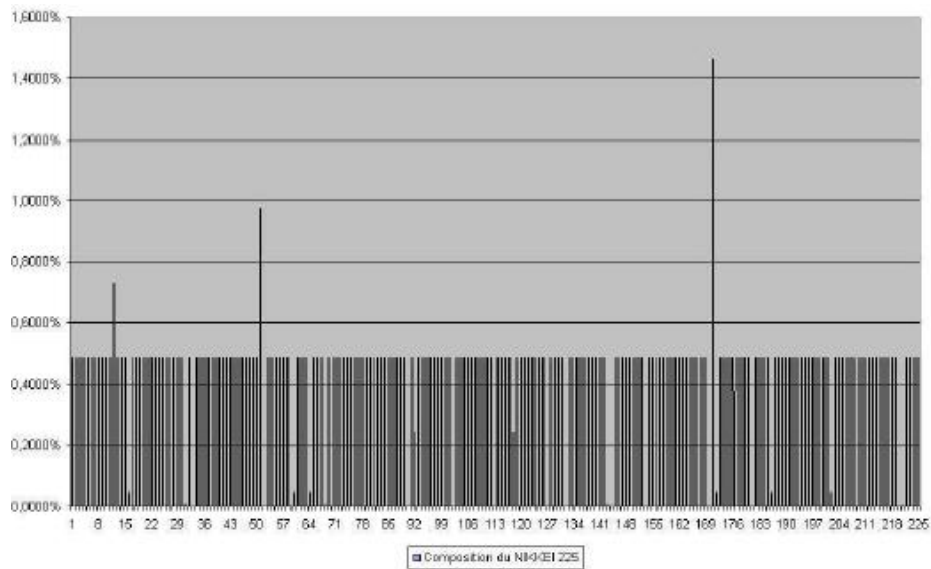


FIG. 3.3 – Le Nikkei 225

### 3.3 Démarche retenue

---

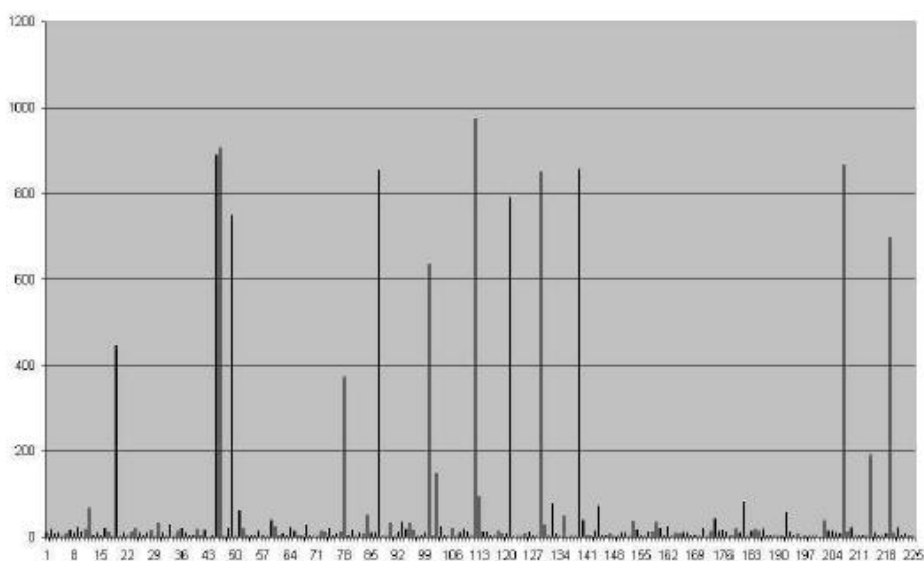


FIG. 3.4 – Le Nikkei 225 capitalisation boursière, unité M\$

Le Nikkei peut être utilisé pour la couverture des grosses capitalisations.

Pour mesurer la liquidité d'un titre, on peut regarder son ADV, Average Daily Volume. Pour le TOPIX, l'ADV est de l'ordre de 40000 contrats par jour, soit 5 000 000 000 dollars échangés. Quant au Nikkei, l'ADV est environ de 100000 contrats quotidiens, soit près de 12 500 000 000 dollars échangés.

Remarquons aussi que la maturité des deux contrats est de trois mois. L'horizon de la liquidation étant d'une journée, nous ne tenons pas compte des expirations dans ce qui suit. Nous référerons par Topix ou Nikkei le contrat sur indice indépendamment de la maturité.

### 3.3 Démarche retenue

Dans la première partie, nous avons considéré une mesure de l'aversion au risque qui est le  $\lambda$  naturellement associé à une variance maximale ou réciproquement un coût maximal à supporter. Cette mesure n'est pas universelle, et il est difficile d'estimer

l'aversion au risque d'un trader, surtout vis à vis d'un portefeuille de composition inconnue à priori. Selon le portefeuille, l'aversion au risque change, et il est donc difficile de fixer un  $\lambda$  d'aversion pour tous les portefeuilles. Le deuxième problème est que les instruments de couverture que nous allons utiliser sont très corrélés, même si la méthode de calcul des poids est différente.

On peut identifier deux risques principaux dès que l'on veut se couvrir :

- un risque de premier ordre, qui est l'exposition nette sur le marché, (le risque en  $\Delta$ ).
- un risque de deuxième ordre qui est un risque de corrélation ou risque en  $\beta$ .

Dans notre stratégie, il est clair que la priorité est de réduire le risque en  $\Delta$  quitte à réduire dans un deuxième temps le risque en corrélation par une position croisée des instruments.

Intuitivement, un faible  $\lambda$  correspond à une volonté de réduire simplement le risque de première ordre, un grand  $\lambda$  traduit une couverture du risque de deuxième ordre. Mais il reste toujours difficile de donner des valeurs précises.

Un utilisateur est incapable de quantifier son aversion, qui va de plus dépendre de son portefeuille. Cependant si l'on veut mener à bien les calculs pour l'optimisation, il faut donner une valeur de  $\lambda$  mesurant le poids que l'on veut mettre sur la variance vis à vis de l'impact. Avec l'introduction du hedge, on espère réduire l'impact en rallongeant la durée de liquidation, et réduire la variance en diversifiant le portefeuille. Pour cela, nous allons introduire une nouvelle mesure de risque qui va nous permettre de donner un sens plus financier à l'aversion au risque.

### 3.4 Méthode de la tangente

Nous avons vu que pour un  $\lambda$  donné, il existait un niveau optimal de coût et de variance. L'idée serait d'optimiser un hedge qui, pour un montant de 1\$ déboursé en coût, nous permette de réduire la variance (ou l'écart type) de  $\tau\%$  où  $\tau$  est un paramètre fixé par l'utilisateur. Un utilisateur averse au risque paiera cher pour la couverture et donc choisira un  $\tau$  faible, alors qu'un utilisateur de liquidation typique

### 3.4 Méthode de la tangente

---

choisira un  $\tau$  grand, il veut que son hedge lui coûte le moins cher possible. Financièrement, choisir un ratio coût / variance revient à choisir un point sur la frontière efficiente tel que

$$-\frac{\partial V}{\partial \text{Coût}} = \tau$$

Il suffit alors de regarder le point de la frontière efficiente tel que la tangente à la courbe vaille  $\tau$ . En effet la variance est une fonction convexe décroissante en coût. Partant d'un coût nul, la position initiale, on est sûr que pour atteindre la position optimale donnée par la tangente, chaque variation en coût est au moins compensé par  $\tau$  variations en écart type.

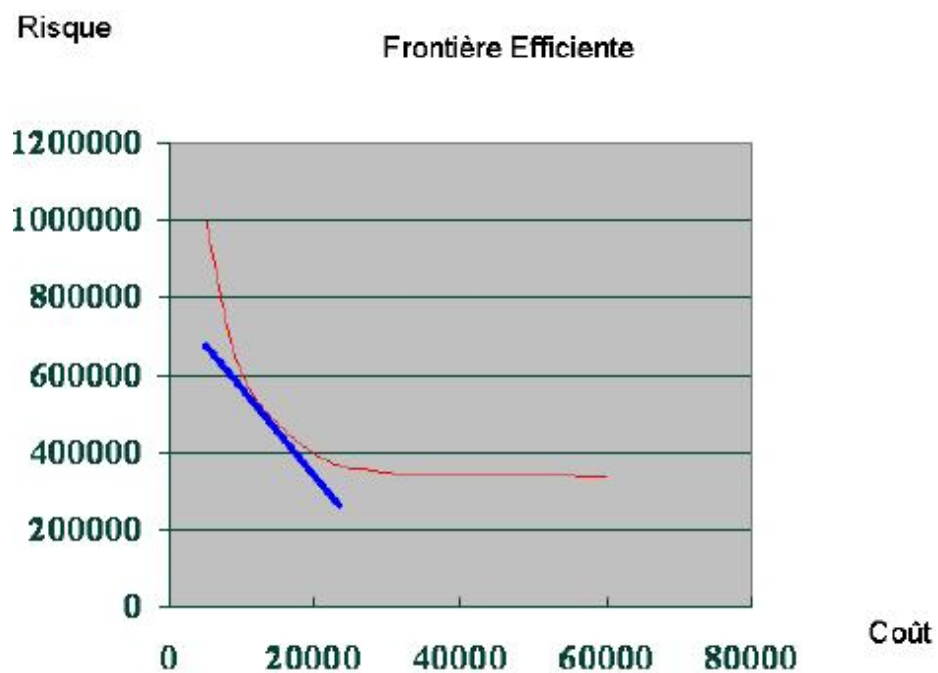


FIG. 3.5 – Présentation de la méthode de la tangente

La stratégie de la liquidation utilise cette méthode, plus gourmande en calcul mais susceptible de donner un hedge cohérent.

## 3.5 Conclusion

Au vu de ces différents résultats et tests, nous avons choisi de retenir la méthode de la tangente. En effet, l'arrivée d'un grand ordre d'exécution laisse une forte exposition vis-à-vis du marché et qu'il faut couvrir immédiatement, pour ce hedge nous avons choisi une grande pente, et l'on est prêt à prendre des risques en journée. Ayant atteint cette position, nous calculons une position optimale de fin de journée où l'on veut être couvert parfaitement. Nous utilisons alors une pente faible.

## 4 La liquidation en pratique

L'algorithme de la liquidation vient s'ajouter à des stratégies existantes que l'équipe de trading développe et maintient.

Le framework de développement est codé entièrement en C++, il fournit des services aux stratégies qui s'insèrent dans cet environnement.

### 4.1 Cahier des charges d'une liquidation

Dans cette partie nous allons décrire nos attentes d'un bon algorithme de liquidation. Ce qui va suivre n'est pas exhaustif mais il s'agit des principaux points que nous avons retenus.

- Liquider, à tout instant, au moins une certaine proportion de notre position. Elle doit tendre vers 0.
- Garder une position minimale pour pouvoir la croiser contre une position inverse, évitant de traiter sur le marché.
- Liquider une fraction maximale de l'ADV, et garder le reste. L'impact au-delà de cette fraction coûtera plus cher que la couverture.  
⇒ ces objectifs sont concurrents, on définit alors des priorités qui vont dans le sens de minimiser l'impact
- Couvrir le portefeuille avec un hedge consistant et peu cher en un temps très court.
- Détecter des positions "toxiques" et les liquider plus rapidement. Ce sont des positions dues à des nouvelles dans le marché où tous les agents cherchent à liquider toute leur position.
- Renforcer les sécurités dans chaque étape, et empêcher l'utilisateur de "se tromper"
- Laisser à l'utilisateur un accès à distance pour tenir compte d'éventuelles informations apparues au cours de la journée trading.

- Concevoir un algorithme, facilement configurable, rapide et qui détecte les problèmes et en informe l'utilisateur.

## 4.2 Sommaire de l'algorithme

Ci-dessous un diagramme résumant les étapes principales de l'algorithme.

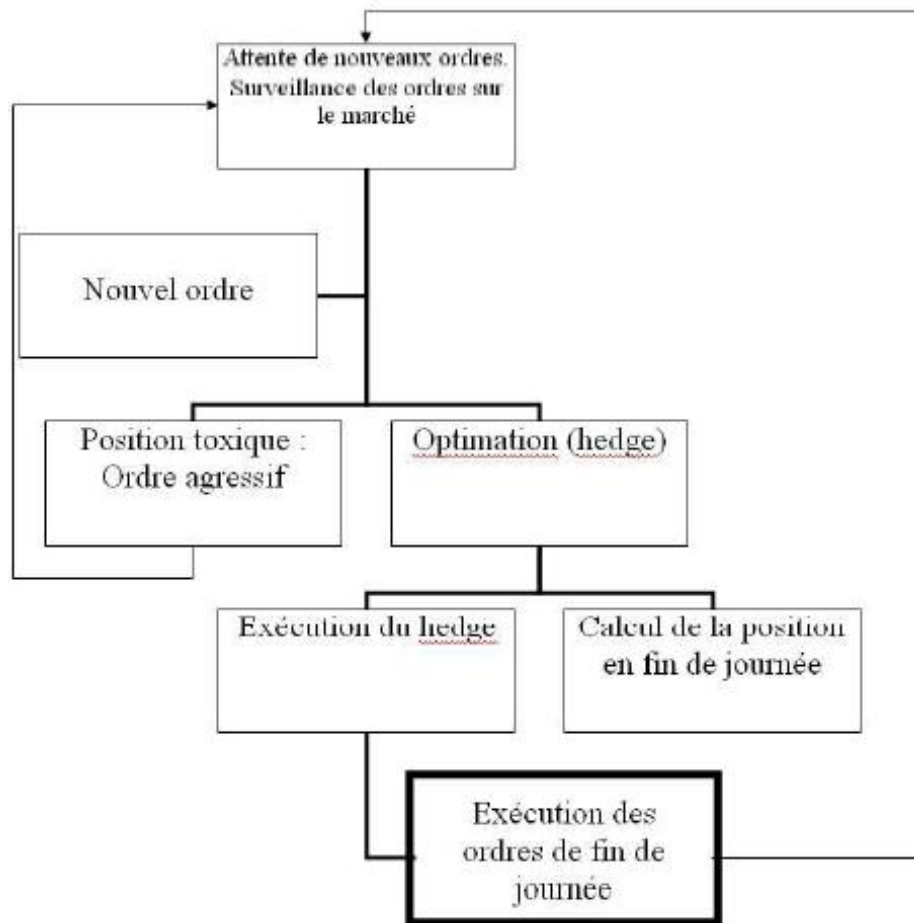


FIG. 4.1 – Schéma de l'algorithme de liquidation

La liquidation va voir ses exécutions réalisées par l'auto-trader via des ordres VWAP, d'horizon assez lent pour réduire l'impact. Ces ordres peuvent se transformer

### 4.3 Tests en marché simulé

---

en ordres **with volume** si l'on veut liquider rapidement une position que l'on sait toxique.

### 4.3 Tests en marché simulé

Ces tests préliminaires ont surtout servi à tester la robustesse de l'algorithme, et l'absence de phénomènes indésirables comme les surexécutions pouvant être dues à diverses erreurs de calcul, ou encore à une "impatience" de l'algorithme d'exécution, qui enverrait de nouveaux ordres vers le marché sans connaître précisément sa position courante, etc. Nous nous sommes servi pour ces tests de données "tick by tick", permettant de simuler le marché de manière exhaustive, événement par événement.

Comme dans la réalité, nous envoyons des instructions dans l'optimiseur, qui renvoie des ordres vers l'algorithme d'exécution, qui lui-même renvoie des ordres vers un marché simulé. Ce dernier utilise les données de marché (ou, de manière parfaitement transparente, peut également écouter le vrai marché en cours de journée pour se servir des prix en temps réel), pour renvoyer des exécutions, simulant ce qu'elles auraient été dans la réalité. Ces tests ne sont pas révélateurs de notre impact de manière réaliste. Bien que le simulateur prenne en compte la taille présente dans le marché quand nous envoyons nos ordres pour nous dire si nous recevons ou non des exécutions, il n'est pas capable de simuler la "fuite" du prix du titre causée par notre présence (notre impact), quand nous voulons traiter de trop grosses quantités d'un certain actif. Les tests ont donc été l'occasion de se rendre compte de l'intensité des calculs d'optimisation, en termes de performance de la machine, pour savoir si l'approche semi-statique était réellement réaliste ou non, d'examiner les résultats de l'algorithme d'optimisation en termes de profil d'exécution, et de vérifier les performances de l'algorithme d'exécution proprement dit (en l'absence supposée d'impact lors des tests; toutefois, nous disposons également de résultats en milieu réel pour notre analyse).

### 4.4 Quelques résultats

Nous obtenons les résultats suivants pour un portefeuille de taille importante :



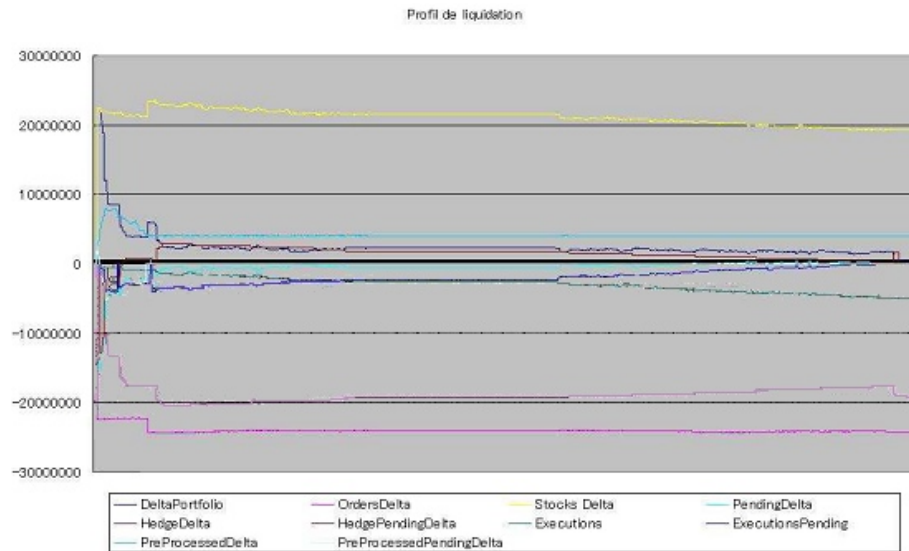


FIG. 4.2 – Profil d'exécution de la liquidation

Ce profil est obtenu après optimisation de la liquidation avec un hedge sur une journée d'un portefeuille long constitué de l'index Nikkei, pour un notionnel de 25 millions de dollars.

Dès réception des ordres, l'algorithme lance des ordres agressifs courts (20 minutes) qui liquident une proportion du portefeuille. C'est ce qu'on appelle les ordres préprocessés. Le hedge est calculé après une minute d'attente et est exécuté immédiatement. Naturellement le delta du portefeuille baisse pour atteindre environ 500.000\$ soit 2% du Delta initial. Le calcul de la position en fin de journée vient pour conclure le cycle avec l'envoi des VWAP d'exécution.

Voici un autre profil où cette fois ci, nous avons envoyé plusieurs portefeuilles à des instants aléatoires de la journée et avec des compositions aléatoires.

## 4.4 Quelques résultats

---

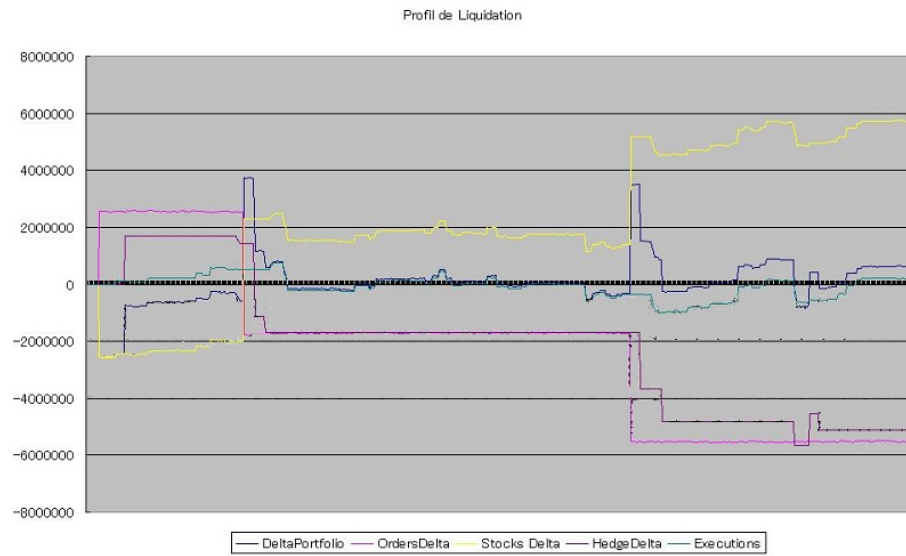


FIG. 4.3 – Profil d'exécution de la liquidation

Comme on peut le remarquer, l'algorithme essaie de réduire son exposition vis à vis du marché puis exécute ses positions lentement. Dans cette situation, cette lenteur est appréciable car on a peut croiser des positions longues contre des positions courtes, évitant ainsi le passage par le marché.

Remarquons aussi que l'algorithme choisit toujours un profil d'exécution non linéaire pour les instruments de couverture. Ceci est attendu dans la mesure où l'on cherche à se couvrir à l'arrivée de nouveaux ordres. Une fois les exécutions lancées, notre exposition sur les stocks diminue et il faut donc que la couverture diminue au même rythme que l'exécution afin de garder une exposition globale raisonnable.

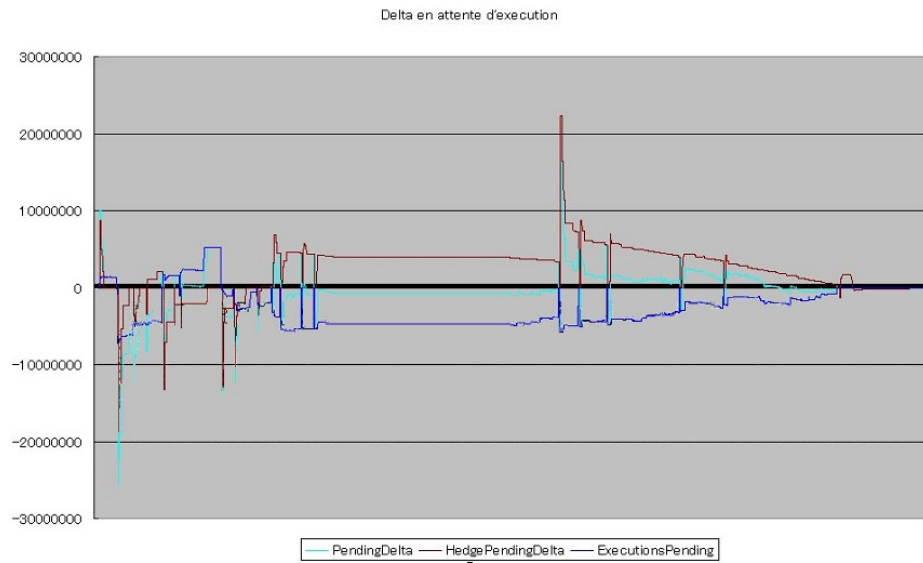


FIG. 4.4 – Profil des ordres en attente d'exécution de la liquidation

Voici le profil des ordres en attente du même portefeuille ci-dessus. Les ordres d'exécution sont coordonnés de façon à conserver une exposition globale faible. Nous voulons en effet que les exécutions de la couverture ainsi que de la liquidation avancent au même rythme. Pour cela, nous avons des mécanismes internes qui surveillent l'exposition vis-à-vis du marché et ajustent l'agressivité des ordres en conséquence.

# Conclusion

Les résultats exposés dans la partie précédente nous donnent une bonne idée du fonctionnement de l'algorithme dans le marché. Plusieurs améliorations sont possibles par une surveillance plus étroite des ordres.

Dans une salle de marché, il existe plusieurs divisions de trading, qui poursuivent des objectifs différents. Il est assez courant que deux traders de la même firme se retrouvent sur le marché pour exécuter, ce qui est globalement inefficace.

Un portefeuille de liquidation est la réponse à une telle inefficacité, il suffit en effet de centraliser tous les ordres dans ce portefeuille, évitant ainsi le passage coûteux sur le marché.



# A Résolution du baikai d'ouverture

Rappelons les règles de l'auktion d'ouverture du marché japonais (ouverture à la Itayose) :

- Tous les ordres marché envoyés à l'ouverture sont exécutés
- Tous les ordres limite d'achat avec des prix supérieurs au prix d'ouverture sont exécutés, et de manière symétrique tous les ordres de vente avec des prix inférieurs au prix d'ouverture sont exécutés.
- Au moins un des deux côtés du carnet d'ordre ("baikai") d'ouverture, achat ou vente, est entièrement exécuté, et au moins un ordre limite de l'autre côté est exécuté
- Enfin, il n'est pas garanti qu'il subsiste, au moment de l'ouverture, de la liquidité des deux côtés : l'ask ou le bid peuvent être totalement vides. Si tel est le cas, le prix d'ouverture est fixé au prix du côté qui reste.

Il s'ensuit que la résolution du carnet d'ordre va s'effectuer dans cet ordre :

- Au prix d'ouverture, les ordres marchés vont être exécutés
- Puis, les ordres limites de vente inférieurs à ce prix ainsi que les ordres limites d'achat supérieurs à ce prix sont exécutés

## A.1 Exemple

Avant l'ouverture, le carnet d'ordre (baikai) est le suivant (prix en yens et quantités unitaires) :

## Résolution du baikai d'ouverture

---

Offre		Prix	Demande	
cum qté	qté		qté	cum qté
	6	ordre marché	4	
44	8	502	1	5
36	20	501	7	12
16	4	500	10	22
12	2	499	8	30
10	4	498	30	60

Les quantités cumulées se "croisent" à un prix de 500 ou 501. S'il doit y avoir une ouverture ce sera à un de ces prix.

Si ce prix est 501 par exemple, alors :

- 4 ordres marché buy et sell sont exécutés à un prix de 501. Reste 2 ordres marché sell.
- Du côté des sell  $\leq 501$  : une quantité de  $4 + 2 + 4 + 20$  ordres limite + 2 ordres marchés sell = 32.
- Du côté des buy  $\geq 501$  :  $1 + 7$  ordres limite = 8.

On exécute tout ce qui est possible (8 ordres) et il reste

Offre		Prix	Demande	
cum qté	qté		qté	cum qté
		ordre marché		
32	8	502		
24	20	501		
4	4	500	10	10
		499	8	18
		498	30	48

On voit alors que si des trades doivent avoir lieu, ce sera au prix de 500.

Essayons donc de résoudre le carnet d'ordre avec 500.

- 4 ordres marché buy et sell sont exécutés à un prix de 500. Reste 2 ordres marché sell.

## A.2 Contre-exemple

---

- Du côté des sell  $\leq 500$  : une quantité de  $4 + 2 + 4$  ordres limite + 2 ordres marchés sell = 12.
- Du côté des buy  $\geq 500$  :  $1 + 7 + 10$  ordres limite = 18.

On exécute alors 12 ordres et le carnet devient

Offre		Prix	Demande	
cum qté	qté		qté	cum qté
		ordre marché		
28	8	502		
20	20	501		
		500	6	6
		499	8	14
		498	30	44

Le baikai est cette fois-ci équilibré et le titre peut ouvrir à 500.

## A.2 Contre-exemple

Il se peut aussi que le baikai soit insoluble, comme le montre cet exemple :

Offre		Prix	Demande	
cum qté	qté		qté	cum qté
	10	ordre marché	0	
10		500	1	1

Dans cet exemple, on ne peut pas exécuter tous les ordres de marché, ce qui enfreint la première règle.





## B Mouvement maximal autorisé

Close de la veille (Yens)		Mouvement maximal (+ ou - Yens)	
>=	<	Daily	1 trade (Kehai)
	100	30	5
100	200	50	10
200	500	80	10
500	1,000	100	10
1,000	1,500	200	20
1,500	2,000	300	30
2,000	3,000	400	40
3,000	5,000	500	50
5,000	10,000	1,000	100
10,000	20,000	2,000	200
20,000	30,000	3,000	300
30,000	50,000	4,000	400
50,000	70,000	5,000	500
70,000	100,000	10,000	1,000
100,000	150,000	20,000	2,000
150,000	200,000	30,000	3,000
200,000	300,000	40,000	4,000
300,000	500,000	50,000	5,000
500,000	1,000,000	100,000	10,000
1,000,000	1,500,000	200,000	20,000
1,500,000	2,000,000	300,000	30,000
2,000,000	3,000,000	400,000	40,000
3,000,000	5,000,000	500,000	50,000
5,000,000	10,000,000	1,000,000	100,000
10,000,000	15,000,000	2,000,000	200,000
15,000,000	20,000,000	3,000,000	300,000
20,000,000	30,000,000	4,000,000	400,000
30,000,000	50,000,000	5,000,000	500,000
50,000,000		10,000,000	1,000,000

Note : En septembre 2009, on a environ 100 yens  $\bar{1}$  dollar US.

## Mouvement maximal autorisé

Cela revient à limiter les variations journalières d'un stock à  $\pm 15\%$  en moyenne, et les variations instantannées à  $\pm 1.5\%$  en moyenne.

## C Taille de tick

Prix (Yens)		Taille de tick (Yens)
$\geq$	$<$	
	2000	1
2,000	3,000	5
3,000	30,000	10
30,000	50,000	50
50,000	100,000	100
100,000	1,000,000	1,000
1,000,000	20,000,000	10,000
20,000,000	30,000,000	50,000
30,000,000		100,000

Note : En septembre 2009, on a environ 100 yens = 1 dollar US.

Cela revient à fixer le tick à environ 15 bps soit 0.15 % du prix le l'action.



# Bibliographie

- [1] Optimal Execution of Portfolio Transactions, Robert Almgren, Neil Chriss, Decembre 2000
- [2] Optimal Liquidation Strategies, Burkart Monch, Goethe University, Francfort, Janvier 2004
- [3] Microstructure des marches financiers, B. Biais, T. Foucault, P. Hillion, PUF, 1997
- [4] Essential C++, Stanley Lippman 2005