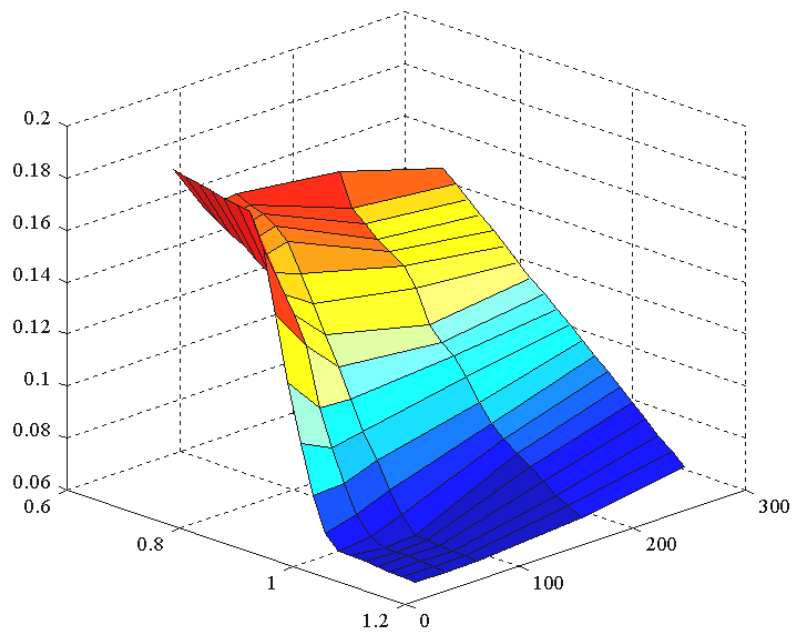


# M

émoire d'Etude  
d'Approfondissement



## Trading de Volatilité

Christian DIDION & Thomas JANNAUD

Valdo DURRLEMAN

Ecole Polytechnique

# Sommaire

## Introduction

### 1. Modèle de Black-Scholes

1.1	Introduction.....	4
1.2	Modèle de Black & Scholes.....	5
1.3	Sensibilités et couverture associée.....	8
	1.3.1 Les « Grecques ».....	8
	1.3.2 Simulations de trajectoires et erreur associée.....	13
1.4	Volatilité.....	18
	1.4.1 Volatilité implicite.....	18
	1.4.2 Influence de la volatilité sur les prix.....	21
	1.4.3 Volatilité empirique.....	23
1.5	Application au trading.....	26
	1.5.1 Importance de l'erreur de couverture.....	26
	1.5.2 Les « Grecques » et le trading de volatilité.....	27

### 2. Le modèle CEV

2.1	Introduction.....	30
2.2	Des éléments de calculs.....	31
	2.2.1 Densité de probabilité.....	31
	2.2.2 Formule du Call.....	34
	2.2.3 Approximations.....	35
	2.2.3.1 Approximation de Schroder.....	36
	2.2.3.2 Approximation de Sankaran.....	36
2.3	Simulations.....	38
	2.3.1 Volatilités.....	38
	2.3.2 Impact du facteur $\beta$ et de la maturité.....	40

## Conclusion

## Annexes

# Introduction

Le trading de volatilité est une des caractéristiques essentielles des marchés d'options : la volatilité est une mesure de quantification du risque de rendement et de prix d'un actif financier. En effet, pour de nombreux observateurs les marchés d'options sont avant tout des marchés où se confrontent l'offre et la demande de volatilité (Nandi et Wagonner [2001]) : les organismes financiers s'engagent dans l'achat ou la vente d'options misant principalement sur leur habilité à prévoir la volatilité future des actifs sous-jacents, tout en se couvrant contre les variations de prix.

D'ailleurs l'utilisation du modèle et de la formule Black-Scholes est très répandue sur les marchés financiers, à tel point que certaines cotations ne se donnent qu'en niveau de volatilité et non plus en prix absolu. Dans une première partie nous aborderons en détails le modèle de Black & Scholes afin d'en dégager les grandes lignes, et les stratégies classiques de trading qui y sont associées, mais aussi les limites de ce modèle, notamment concernant l'absence de prise en compte du caractère non constant de la volatilité. Ainsi nous élargirons l'étude au modèle CEV, une extension classique du modèle de Black & Scholes permettant l'introduction d'une volatilité stochastique et ainsi de mieux décrire certains types de marchés.

Les algorithmes implémentés dans ce travail ont été écrits à l'aide du langage scilab et les codes de ces algorithmes se trouvent en annexe à la fin du rapport. Nous avons utilisé d'autres logiciels dont notamment Maple pour l'étude de certains calculs, qui apparaîtront donc pixellisés au lecteur attentif. Nous tenons d'ores et déjà à remercier Monsieur Nizar Touzi pour sa formation en Mathématiques Stochastiques à l'Ecole Polytechnique, et plus particulièrement Monsieur Valdo Durreleman qui nous a apporté tout son soutien et sans qui cette étude n'aurait pas été possible.

# 1. Modèle de Black-Scholes

## 1.1 Introduction

Une option financière est un produit financier qui donne le droit, et non l'obligation,

- d'acheter une action appelée sous-jacent « S » : on parlera dans ce cas de call « c »
- ou de vendre le sous-jacent : put « p »
- à un prix prédéterminé à l'avance appelé le strike « K »
- à une échéance donnée pour les options européennes qui feront l'objet de cette étude

Cette option se négocie, sur un marché d'options spécialisé contre une prime : on parlera du prix de l'option. Le résultat d'une option à son échéance, le « pay-off » ne dépend que du prix du sous-jacent.

Le résultat

- pour l'acheteur d'un *call* sera  $R_{call} = \max(0, S - K) - p$
- pour le vendeur d'un *call* sera  $R_{call} = -\max(0, S - K) + p$

La formule de Black-Scholes permet le calcul de la valeur théorique d'une option à partir des données suivantes :

- la valeur actuelle de l'action sous-jacente :  $S(t)$
- le temps qui reste à l'option avant son échéance :  $T-t$
- le prix d'exercice fixé par l'option :  $K$
- le taux d'intérêt sans risque :  $r$
- la volatilité du prix de l'action :  $\sigma$

Le prix théorique d'une option d'achat call est caractérisé par son pay off:  
 $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K; 0)$

Notre but est de calculer entre autre le prix de l'option qui est donné par l'espérance du *pay off* final actualisé  $C = E[\text{Payoff} \times e^{-rT}]$

## 1.2 Modèle de Black & Scholes

Pour ce faire, il convient d'expliciter les hypothèses du modèle de Black–Scholes, un modèle à deux actifs : l'un risqué, l'autre pas. À l'instant  $t$ , le prix de l'actif sans risque est  $R_t$  et le prix de l'action est  $S_t$ . On a les hypothèses suivantes :

- $S_t$  suit un mouvement brownien géométrique
- $\sigma$ , la volatilité est connue à l'avance et est constante
- L'achat et la vente de sous-jacent est possible à tout moment et sans frais, ce qui est une limite au modèle au vu de la réalité des transactions
- L'achat et la vente est illimitée : l'introduction d'un plafond complique sérieusement le modèle
- Les ventes à découvert sont autorisées or tous les marchés ne permettent pas en théorie cette hypothèse
- Il n'y a pas de dividende
- $r$  le taux d'intérêt est connu à l'avance et est constant
- L'option est européenne

On suppose que :

$$dR_t = r_t R_t dt, \quad \text{soit} \quad R_t = R_0 e^{\int_0^t r_s ds},$$

où  $R_t = 0$  représente le taux d'intérêt instantané. En fait on va prendre  $R_0 = 1$ .

Le prix de l'action,  $\{S_t\}_{t=0}$ , est régi par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t), \quad S_0 > 0 \text{ donné.}$$

où  $\mu_t$  est un paramètre réel, pente de la partie linéaire, et  $\sigma_t \geq 0$ ; le paramètre  $\sigma$  s'appelle la volatilité de  $\{W_t\}$  mouvement Brownien standard, et quantifie le degré du caractère aléatoire de l'évolution de  $S_t$ .

Dans le modèle de Black–Scholes originel, les paramètres  $r$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des constantes. On a dans ce cas

$$R_t = e^{rt}, \quad S_t = S_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t} e^{\mu t}.$$

On cherche un portefeuille autofinçant pouvant répliquer parfaitement une option.

Un portefeuille, de valeur  $v_t$  à tout instant  $t$ , constitue de  $\Delta$  actions et d'une quantité de cash  $v - S \Delta$ , est autofinçant si

$$dv = (v - S \Delta) r dt + \Delta dS$$

Une fonction  $v(t, S(t))$  suffisamment continue, telle que  $v_t = v'(t, S(t))$  devrait vérifier, par la formule d'Itô :

$$dv = (v'_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 v''_{xx}) dt + v'_x \Delta S$$

Ainsi, si une telle fonction existe, nécessairement

$$(v - S \Delta) r = v'_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 v''_{xx}$$

$$\text{et } v'_x = \Delta.$$

Ainsi,  $v$  est solution de

$$(v - x v'_x) r = v'_t + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v''_{xx}$$

$$\text{et } v(T, x) = h(x)$$

afin que le portefeuille soit égal au pay-off en T.

Ainsi, si une telle fonction  $v$  existe, alors  $v(t, S(t))$  réplique exactement l'option.

En effectuant le changement de variable

$$v(t, x) = \exp(rt) u(t, \frac{1}{\sigma} \ln[x - (r - \frac{1}{2} \sigma^2)t])$$

on est ramené à un problème de Dirichet admettant comme unique solution

$$u(t, x) = E[p(t, x + Wt)] \text{ où } p = \exp(-rT) h(\exp((r - \frac{1}{2} \sigma^2)T + \sigma x))$$

Ceci prouve l'existence et l'unicité d'une telle fonction  $v$ .

Le prix de l'option est donc donné par  $v(0, S_0)$ .

Economiquement parlant, puisqu'il existe une stratégie « répliquante » de l'option avec un tel prix  $p$ , l'option ne peut être vendue à un prix plus haut ou plus car il y aurait dans le cas contraire, des possibilités d'arbitrage.

Il est remarquable que l'on puisse écrire  $C$  sous la forme d'un pay off final actualisé :

Le pay off final actualisé est

$$C = E[\text{Payoff} \times e^{-rT}]$$

d'où

$$C = \mathbb{E}^* [e^{-rT} (S_T - K)^+]$$

Soit en utilisant l'expression intégrale de  $S(T)$  donne avec  $\alpha = \sigma\sqrt{T}$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left( S_0 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} - e^{-rT} K \right)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_I e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{e^{-rT} K}{\sqrt{2\pi}} \int_I e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

si  $I = \left\{ x \in \mathbb{R}, S_0 e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} \geq e^{-rT} K \right\} = [-d^-, +\infty[$  avec

$$d^\pm = \frac{rT + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\alpha^2}{2}}{\alpha} = \frac{rT + \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} C &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \geq -d^-} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2}} dx - \frac{e^{-rT} K}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \geq -d^-} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{y \geq -d^- - \alpha} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{e^{-rT} K}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \geq -d^-} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \end{aligned}$$

et comme  $d^- + \alpha = d^+$ , on obtient finalement

$$C = S_0 \Phi(d^+) - e^{-rT} K \Phi(d^-),$$

où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de loi normale centrée réduite.

*Limites du modèle:* l'expérience montre qu'en réalité la volatilité dépend du prix d'exercice et de la maturité, en plus des hypothèses de non plafonnement et de la gratuité des transactions.

Grâce à cette formule, nous allons pouvoir définir une stratégie d'investissement en tentant de réduire le risque à zéro, pour cela on va utiliser la condition d'autofinancement qui permet de déterminer la dynamique de la valeur d'un portefeuille.

## 1.3 Sensibilités et couverture associée

Si une banque commercialise des options ou des produits dérivés pour un client en dehors du marché financier, elle se trouve face à un problème pour gérer ce risque. Si l'option est cotée sur un marché, elle peut aisément neutraliser son risque. Elle vend l'option et achète la même sur le marché en réalisant juste une opération de courtage. Cependant aux vues du développement actuel du marché, un contrat peut être vendu pour un besoin spécifique sans qu'il ait forcément de contrat correspondant coté sur le marché. Le risque supporté par la banque devient plus difficile de gérer. Par une stratégie de couverture elle peut neutraliser son risque, ce que l'on va montrer en utilisant un algorithme sous scilab.

### 1.3.1 Les « Grecques »

La sensibilité de l'option est mesurée par cinq paramètres qu'on appelle grecques :

- le Delta mesure la sensibilité (étant la dérivé) de la valeur d'une option par rapport aux variations du prix du sous-jacent : on s'intéressera ici beaucoup au Delta qui joue un rôle particulier

$$\Delta c = \frac{\partial}{\partial S} C$$

- le Gamma mesure la sensibilité de l'option aux variations du Delta

$$\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial S^2} C$$

- le Theta mesure la sensibilité d'une option au temps restant jusqu'à l'échéance au temps T

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial t} C = -\frac{\partial}{\partial \tau} C$$

- le Vega mesure la sensibilité de l'option par rapport à  $\sigma$

$$V = \frac{\partial}{\partial \sigma} C = C_{\sigma} = S\sqrt{\tau}\Phi(d_1)$$

- le Rho mesure la sensibilité d'une option au taux d'intérêt à court terme : on se s'intéressera pas ici au Rho aux vus des modèles utilisés

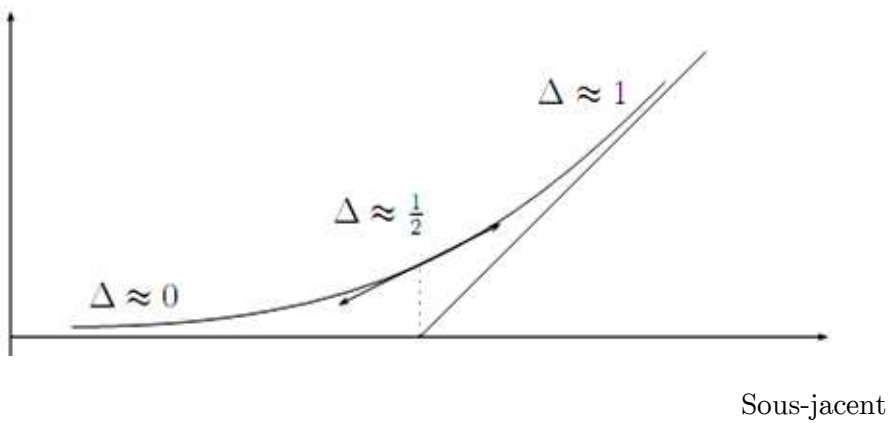


Delta  $\Delta$ :

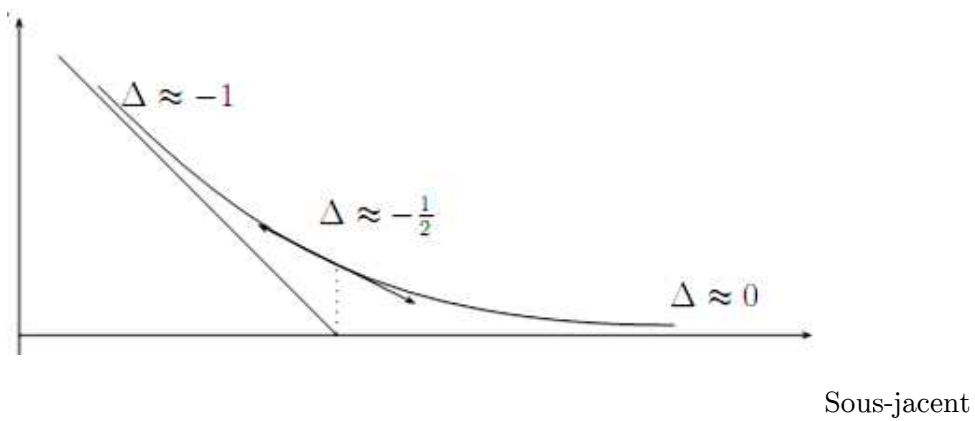
Le Delta mesure la variation de l'option lorsque le sous-jacent varie d'une unité.

D'après la relation d'autofinancement, le Delta nous donne le nombre d'actions à utiliser pour couvrir une option.

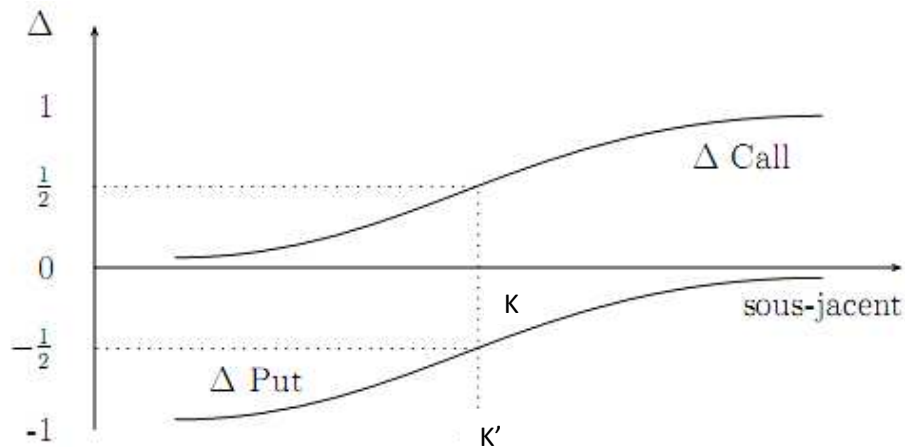
On rappelle que pour le Call :  $\Delta c = \frac{\partial}{\partial S} C = C_s = N(d_1)$



*Influence du prix du sous jacent sur la valeur du call*



*Influence du prix du sous jacent sur la valeur du put*



*Influence du sous-jacent sur le delta avec*

*K=prix du strike*

Pour couvrir sa position, le vendeur de call une position en Delta-neutre. Il constitue un portefeuille d'actions. Sur un certain nombre d'actions il respecte toujours deux conditions:

- acheter  $\Delta$  actions par call vendu
- gérer en continu

#### Exemple concret

Soit  $\Delta = 0,2$  (calculé par des méthodes de pricing). Pour couvrir la vente d'un call la banque achète donc 0,2 actions par option vendue. Si elle vend 100 options d'achats, on a donc la position suivante:

- La position acheteur (longue) est : 20 actions
- La position vendeur (courte) est : 100 options.

Le delta global d'une position est le gain (positif ou négatif) réalisé lorsque le cours de l'action augmente d'une unité. On considère ici que le prix de l'action et du call sont normalisés à une unité monétaire. Si l'action monte de 1, on a alors les gains suivants

- Gain position courte pour 100 options :  $0,2 \cdot (-100) = -20$
- Gain position longue pour 20 actions :  $1 \cdot 20 = 20$

Le  $\Delta$  global vaut donc 0.

On peut utiliser ce processus pour

- un acheteur de call aussi, avec une position inversée  $\rightarrow$  position de vendeurs d'actifs par call acheté
- un acheteur de put  $\rightarrow$  position longue put couverte par une position longue action

- un vendeur d'option de put → position courte put couverte par une position courte l'action

On fera des simulations avec scilab en temps discret car bien évidemment la notion de temps continu est impossible à respecter au sein du marché pour des raisons évidentes de temps d'ajustement ainsi que paiement des transactions qui ne sont pas gratuites.

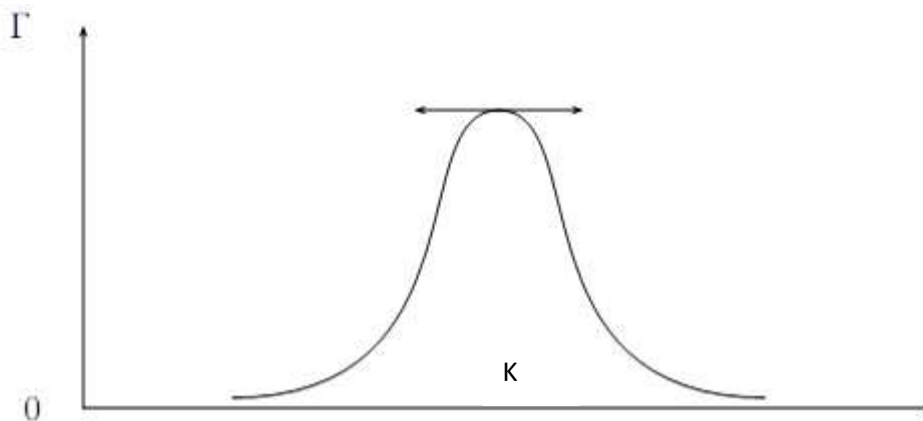
### Le Gamma $\Gamma$

Gamma est la variation du delta d'une option quelconque lorsque l'actif sous-jacent varie d'une unité.

$$\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial S^2} C = C_{SS} = \Phi(d_1) \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}$$

$\Phi$  est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

Lorsque le sous-jacent est près du strike, le  $\Delta$  est instable pour n'importe quelle option d'où un  $\Gamma$  élevé. Loin de cette position, le  $\Delta$  est stable



*Le Gamma en fonction du sous-jacent*

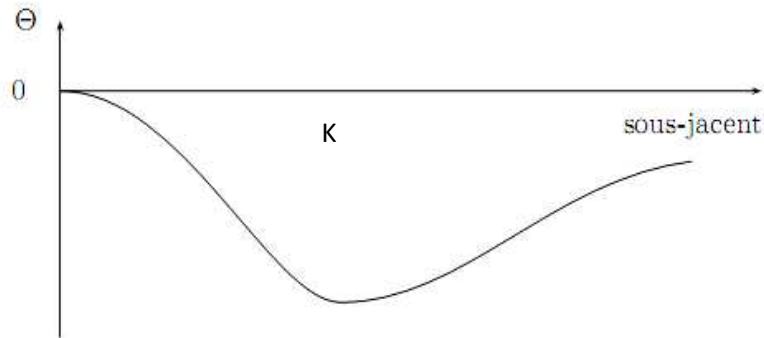
Le  $\Gamma$  est important dans une stratégie delta neutre. Si le  $\Gamma$  est élevé, les rééquilibrages seront nombreux à cause de la forte instabilité de la couverture. La stratégie idéale de delta neutre correspond à un  $\Gamma$  et un  $\Delta$  proche de 0.

### Thêta $\Theta$

$\Theta$  donne la sensibilité de l'option par rapport au temps. La valeur d'une option diminue avec le temps :  $\Theta$  est toujours négatif. Dans cette étude on s'intéressera peu au rôle de  $\Theta$  lors de la stratégie de delta neutre.

Pour le call :

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial t} C = -\frac{\partial}{\partial \tau} C$$



*Thêta en fonction du sous-jacent*

*Remarque :*

Pour un call, on a :

$$\Theta + rS\Delta + 1/2\sigma^2 S^2 \Gamma + = rC$$

### Le Vêga V

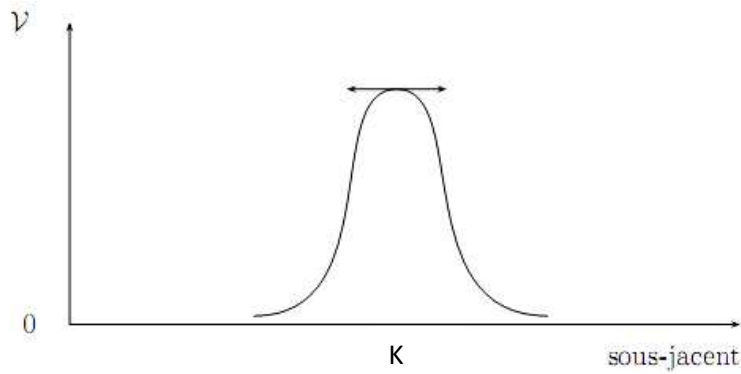
V mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations de la volatilité de l'action.

Pour le call, on a:

$$V = \frac{\partial}{\partial \sigma} C = C_{\sigma} = S\sqrt{\tau}\Phi(d_1)$$

Il est intéressant de noter que la valeur de l'option d'achat est une fonction croissante de la volatilité. En effet, une volatilité forte augmente les chances d'exercer le call et augmente donc son prix.

Dans le cas du modèle de Black and Scholes, V sera peu utilisé car  $\sigma$  est constante.



Vega en fonction du sous-jacent à  $\sigma$  constant.

Rho  $\rho$  :

Rho mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport au taux d'intérêt  $r$ . Cela mesure le risque lié à la variation du taux d'intérêt à court terme. Dans le modèle de Black and Scholes, rho a peu d'intérêt car  $r$  est supposé constant et en pratique sur la durée de vie de l'option  $r$  ne varie pas trop.

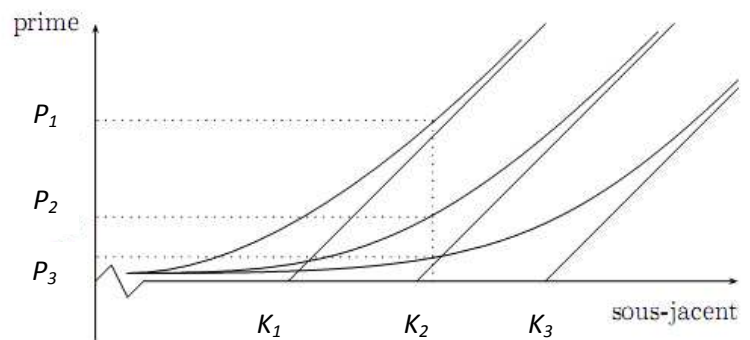
Au vu de ces données, nous avons simulé des trajectoires d'actions afin de calculer à chaque pas ( $\delta(\tau)=T-\tau$ ) le delta associé afin de toujours conserver dans notre portefeuille une position à risque neutre : on considère que l'on utilise seulement des positions sur des calls et le sous-jacent associé. Le programme se trouve en annexe.

On peut redonner quelques repères fondamentaux :

- un call a un  $\Delta$  positif compris entre 0 et 1 ;
- un put a un  $\Delta$  négatif compris entre 0 et -1 ;
- le sous-jacent a un  $\Delta$  de 1 ; l'actif sans risque a un  $\Delta$  nul.
- une option proche de la monnaie a souvent un  $\Delta$  voisin de  $\frac{1}{2}$  (+ ou -)
- une option très « dans la monnaie » a un  $\Delta \sim 1$  (+ ou -) car elle a une forte probabilité d'être exercée
- une option très en dehors de la monnaie a un  $\Delta \sim 0$  : on ne l'exerce pas

Remarque sur la dépendance du prix de l'option par rapport au strike:

*Le call par exemple, a plus de chance d'être exercé si le strike est faible. De ce fait, la prime est corrélée négativement par rapport au strike.*

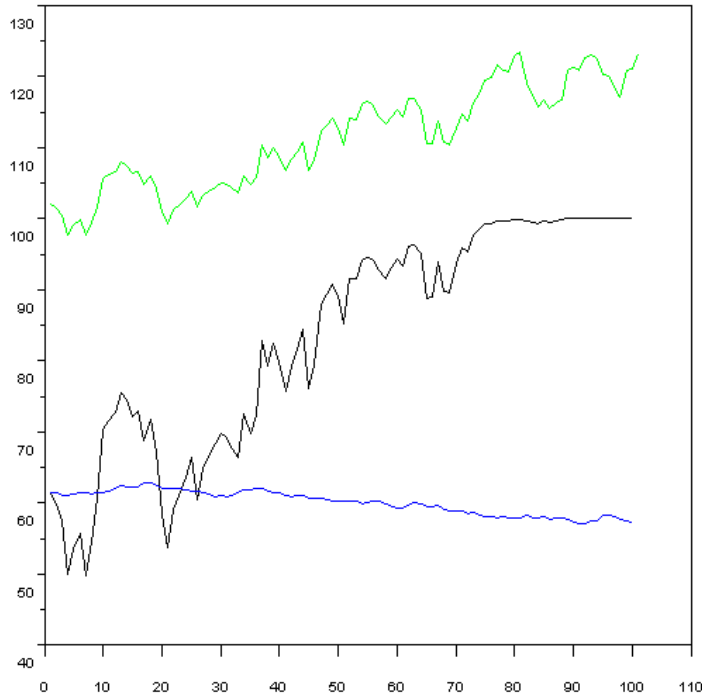


### 1.3.2 Simulations de trajectoires et erreur associée

#### Simulation :

Pour toutes nos simulations, nous avons choisi un  $S_0 = 103$ , et un strike  $K = 100$ ,

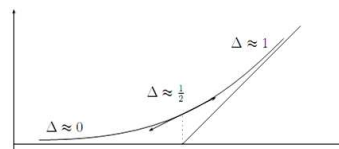
Voici les résultats associés à nos simulations :



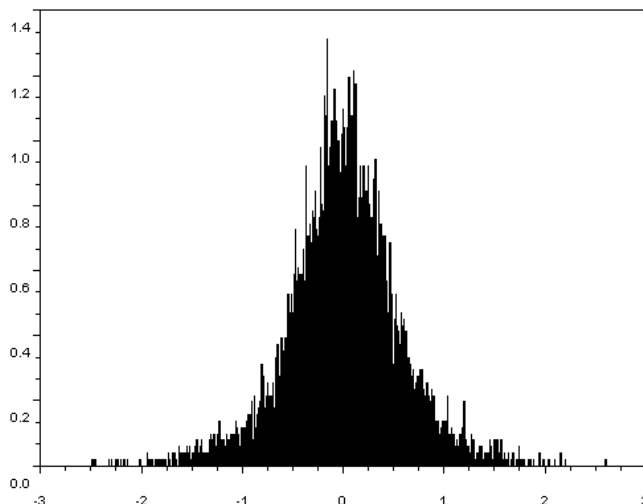
*En vert : une trajectoire, en noir, le delta associé, et en bleu, le delta moyen à un instant donné.*

$$K = 100$$

Le delta se stabilise très fortement à l'approche de la maturité : le prix de l'option étant continu, si celui ci est bien au dessus du strike avant maturité, puisqu'il va certainement falloir payer le call a l'acheteur, il est normal de chercher à s'assurer contre ce risque en possédant l'action. (et inversement si le prix avant maturité est bien en dessous du strike).



*Rappel*



*Histogramme de l'erreur sur 10000 simulations.*

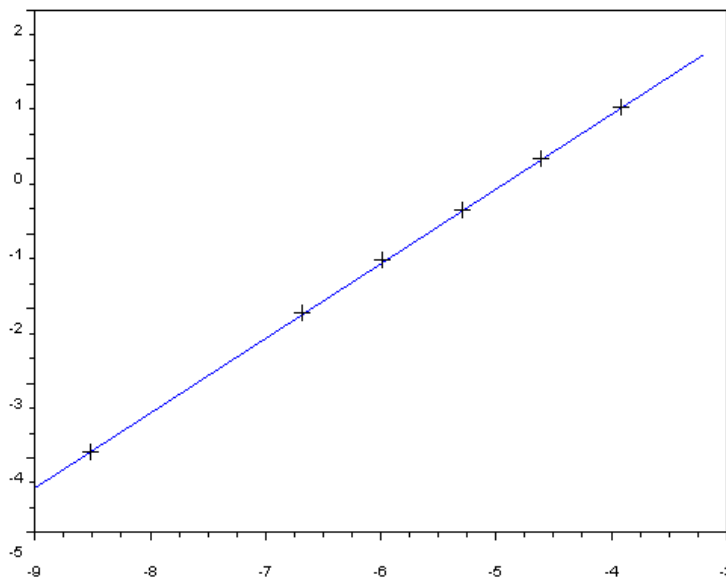
De nombreuses autres simulations conduisent à cette forme, pour l'erreur.

Derman montre que la volatilité vérifie [2] :

$$\frac{\sigma_{P&L}}{C_0} \approx \sqrt{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

On a donc comparé nos valeurs simulées avec la formule de Derman, résultats résumés brièvement ci-dessous. On a pu prouver que l'espérance de l'erreur tend vers 0 comme  $1/N$ . La démonstration de ce résultat est en annexe.

pas	T	d1	sigma <sup>2</sup>	formule_derman
0.0002	0.25	.29	.0198	.0197
0.00125	0.25	.29	.129	.123
0.0025	0.25	.29	.26	.247
0.005	0.25	.29	.51	.494
0.01	0.25	.29	1.01	.988
0.02	0.25	.29	2.01	1.976
0.0025	0.15	.293	.24	.246
0.0025	0.5	.31	.28	.241
.005	.05	.36	.51	.451
.002	.8	.35	.21	.18



Les + représentent les valeurs de  $\log(\sigma^2)$  pour  $T = 0,25$  en fonction de  $\log(pas)$ . La pente de la courbe bleue est de 1.

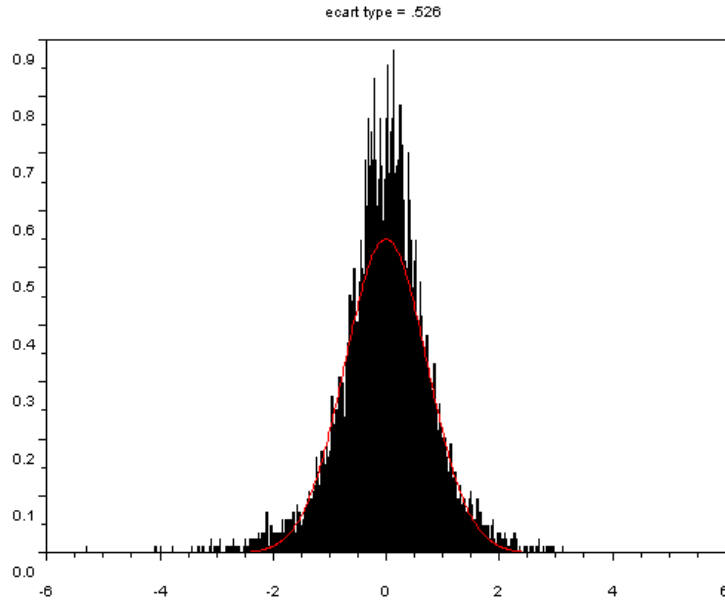
La courbe bleue représente la formule approchée de Derman.

On remarque aussi que  $\sigma$  ne dépend que de peu de paramètres, au vu du tableau.

On a ainsi

$$\log(\sigma) = a + \log(pas)$$

$$\text{ie } \sigma^2 \propto \frac{1}{n} \quad \text{et } n \text{ est le nombre d'intervalles}$$



*Histogramme de l'erreur sur 1000 simulations.*

*En rouge, le tracé d'une gaussienne de même variance, centrée.*

Ce graphe est particulièrement intéressant : a priori, en partant d'un portefeuille de valeur nulle, on ne peut pas créer de richesse de manière certaine. Le modèle de Black Scholes indique d'ailleurs quelle stratégie permet d'obtenir un risque nul. Cependant, en discret (puisque dans la réalité on ne peut avoir de stratégie en temps continu), si la moyenne de l'erreur semble être nulle, l'erreur elle, ne l'est pas. On reviendra sur ce point ultérieurement.

Nous allons nous intéresser aux causes de l'erreur : Quelles formes du sous jacent conduisent à une erreur positive ou négative ?

*Etude des cas extrêmes :*

- Cas 1 : le sous jacent augmente toujours, et suit

$$dS = \mu S dt + \sigma S \sqrt{dt}$$

- Cas 2 : le sous jacent diminue toujours, et suit

$$dS = \mu S dt - \sigma S \sqrt{dt}$$

Ces cas correspondent à de « faux » mouvements browniens : une marche aléatoire où il n'y a pas de rebroussement de chemin.

Dans le premier cas, Erreur = -0,083

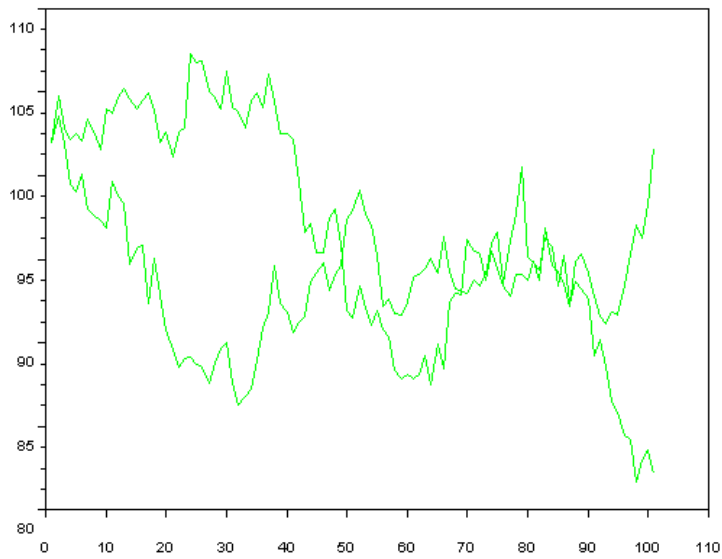
Dans le second, Erreur = -0,071



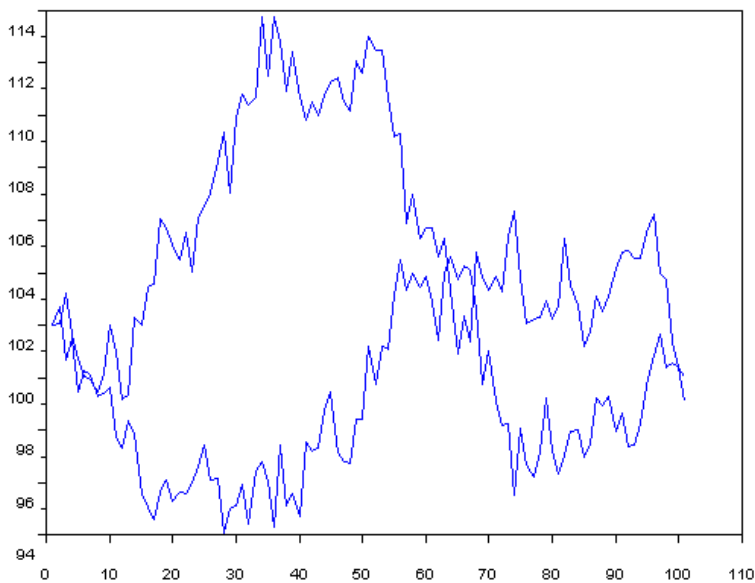
Alors que l'on pourrait s'attendre à une erreur positive et l'autre négative, il n'en est rien.

### *Etude des trajectoires*

Nous avons effectué d'autres simulations, et avons exhibé les trajectoires du prix de l'action conduisant à un résultat final très gagnant ou très perdant c'est-à-dire lorsque l'erreur est supérieure à 2 en valeur absolue. En vert les trajectoires perdantes, en bleu les gagnantes.

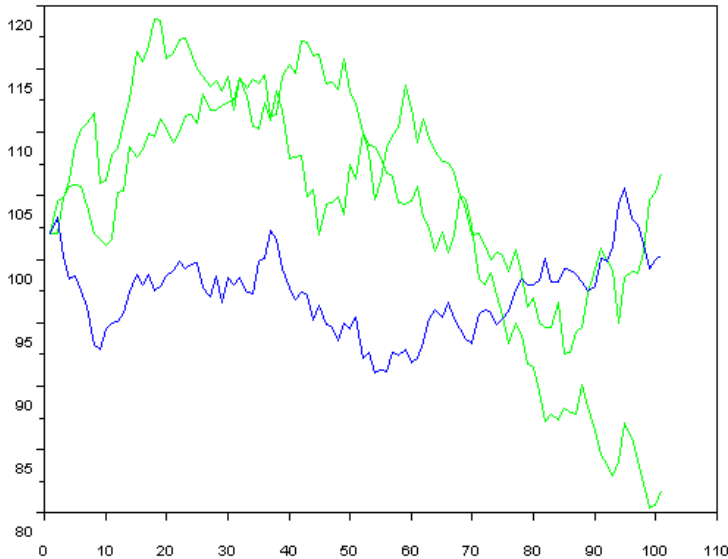


*2 trajectoires perdantes*



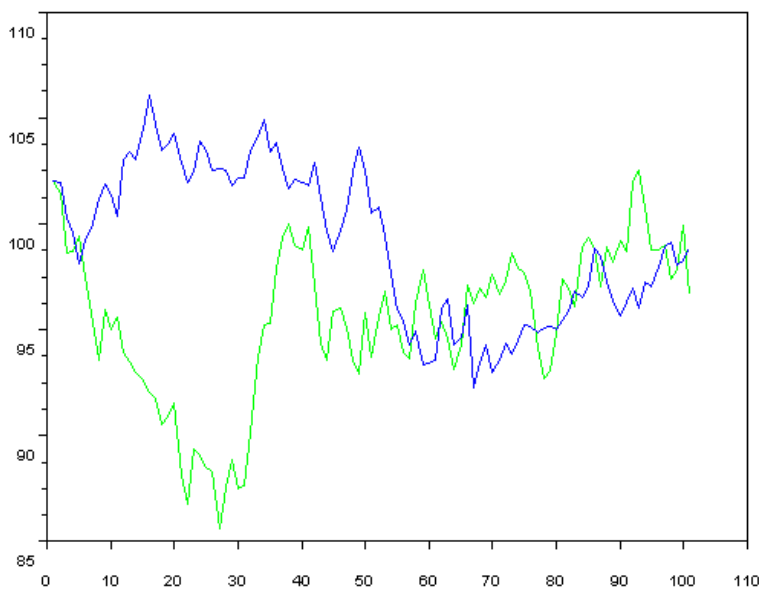
*2 trajectoires gagnantes.*

Comme on peut le remarquer sur les 2 graphes précédents, il ne semble pas a première vue y avoir de point commun entre 2 trajectoires de même type : par exemple on aurait pu penser à des caractéristiques communes du style départ fort suivi d'une perte de vitesse ou inversement. On va ici comparer simultanément des trajectoires gagnantes et perdantes.



*Sur ces 2 derniers graphes comparés, on ne peut pas non plus relever simplement des points communs.*

*Sur le premier graphe, la trajectoire gagnante est bien en dessous de la perdante, puis presque égale par la suite.*



*La gagnante est bien au dessus de la perdante avant que ces 2 trajectoires ne se rejoignent.*

*Il conviendra donc de s'intéresser à un autre facteur : la volatilité*

## 1.4 Volatilité

### Remarque sur le modèle de BS.

Le modèle de Black et Scholes ne dépend finalement que d'un paramètre non directement observable : la volatilité. C'est une mesure de l'amplitude du phénomène aléatoire qui régit le cours d'une action. De plus, les formules de prix et les stratégies de couverture associées sont avec ce modèle théorique (en prenant des actifs simples comme un call ou un put) très facilement calculables d'où sa portabilité au monde de l'entreprise, sachant qu'en plus ce modèle annule en théorie le risque lié aux opérations de couverture

### Remarque des fondateurs de cette théorie

Il existe un phénomène intéressant relaté par Fisher Black lui-même : l'utilisation massive de ce modèle par les praticiens a pour effet d'impacter par son existence le cours des actifs. « Les opérateurs savent maintenant utiliser la formule et les variantes. Ils l'utilisent tellement bien que les prix de marché sont généralement proches de ceux donnés par la formule, même lorsqu'il devrait exister un écart important... »

### 1.4.1 Volatilité implicite

C'est le seul paramètre non directement observable. Certaines options simples sont cotées sur des marchés organisés d'où il est aisé d'obtenir des renseignements sur ce paramètre en se servant des données du marché.

Il faut extraire la volatilité par un moyen précis. Une méthode qui pourrait être utilisée est celle de l'estimer statistiquement à partir de l'observation des cours. On ne l'emploie pas du fait que la culture des milieux financiers est a-statistique mais aussi parce les financiers ont beaucoup plus confiance dans le marché que dans le modèle.

Du coup, on inverse le problème: la formule de Black-Scholes donnant le prix de l'option d'achat est une fonction de paramètres connus à l'instant  $t$ ,  $S_t$ ,  $K$ ,  $T$  et d'un paramètre inconnu : la volatilité  $\sigma$ . On vérifie que la formule de Black-Scholes est une fonction strictement croissante et continue de  $\sigma$ , bijective sur l'ensemble des valeurs a priori possibles de l'option.

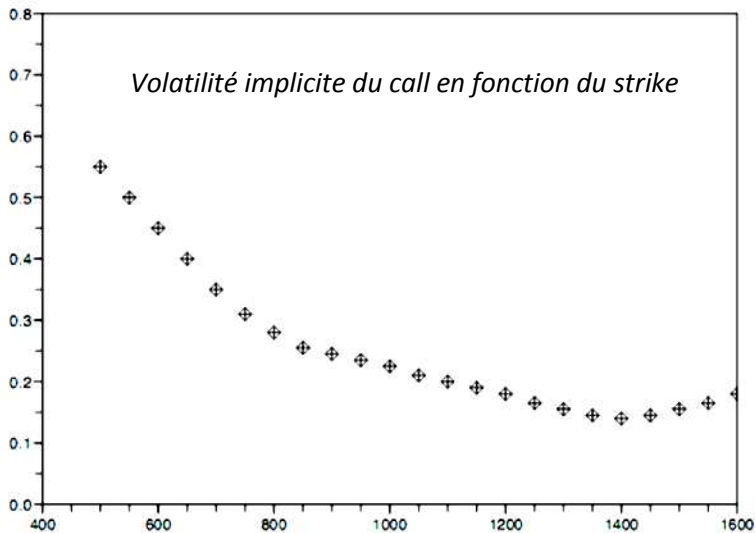
On utilise alors le prix de marché pour extraire numériquement la volatilité implicite, solution unique à l'instant  $t$  de l'équation

$$C(t, S_t, T, K, \sigma \text{ implicite}) = \text{Prime cotée}(t, K, T) \quad (\text{pour une cotation de l'actif } S_t).$$

Dans le cas de Black et Scholes, la volatilité implicite devrait en théorie égaler la volatilité historique se définissant par l'écart type des rendements du sous-jacent).

En réalité on observe un comportement différent :

La volatilité implicite dépend de la maturité et du strike de l'option. Cette dépendance étant d'autant plus forte que la maturité de l'option est courte. La forme de la courbe est tout à fait significative, on parle d'un smile de volatilité.

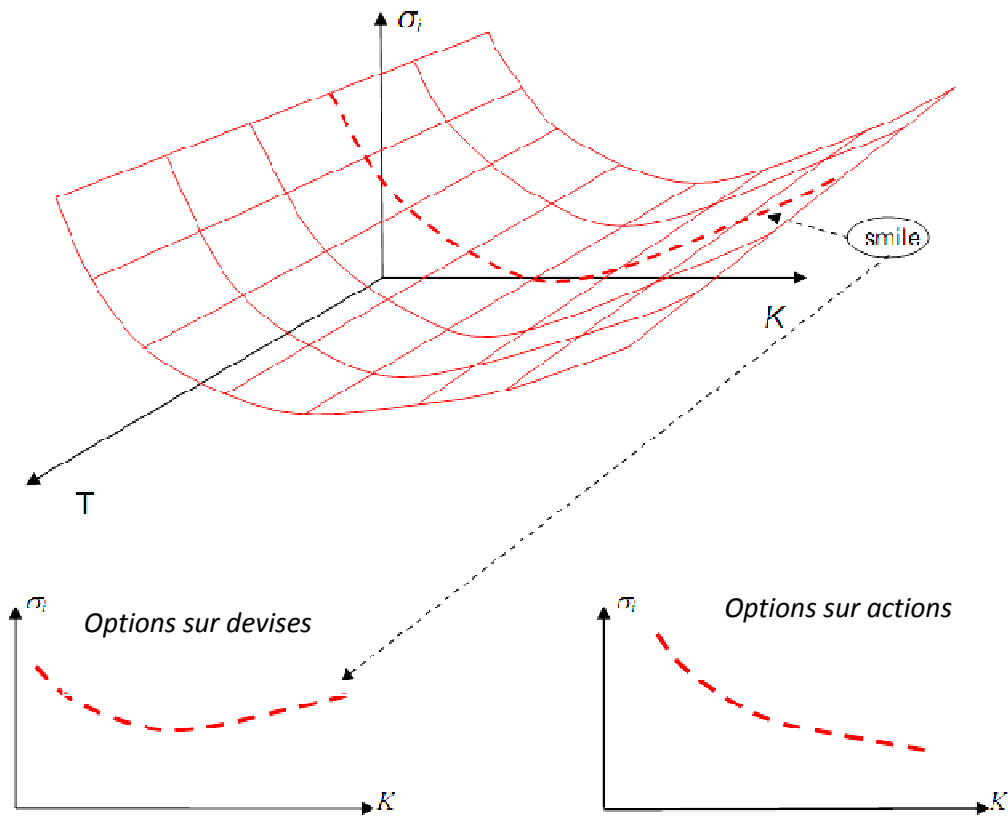


*Ce graphique nous indique la dépendance au strike de la volatilité d'une option d'achat européenne.*

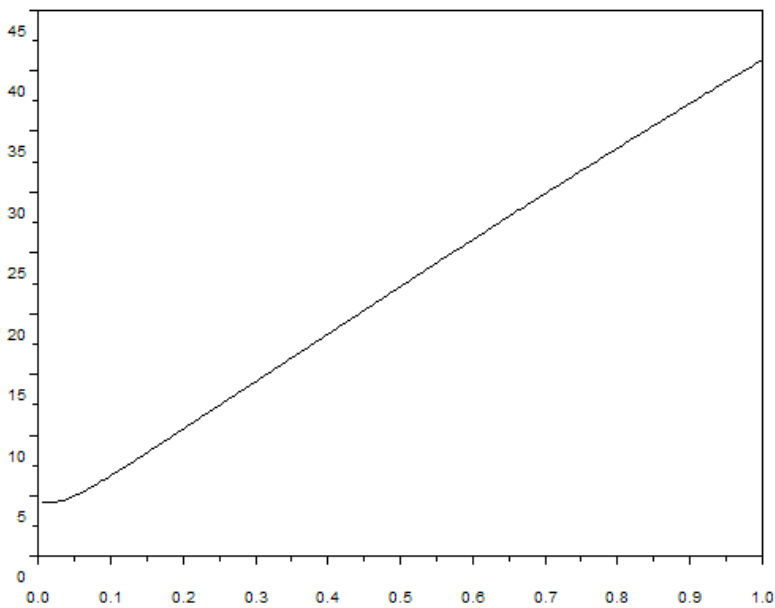
$$\sigma = \sigma(K)$$

De manière plus générale, la volatilité implicite est une fonction  $\sigma = \sigma_i(T, K)$  représentée dans un espace 3D par une « nappe de volatilité ». On voit que le smile est l'intersection de cette nappe et d'un plan orthogonal à l'axe T. L'intersection avec un plan orthogonal à l'axe K est une courbe dite de structure par termes.

Il existe 2 types de tendance concernant les courbes de smile, comme montré sur le graphique : le smile options sur devises, convexe, d'abord décroissant puis croissant et le smile pour options sur actions, convexe, et décroissante sur tous les strikes.

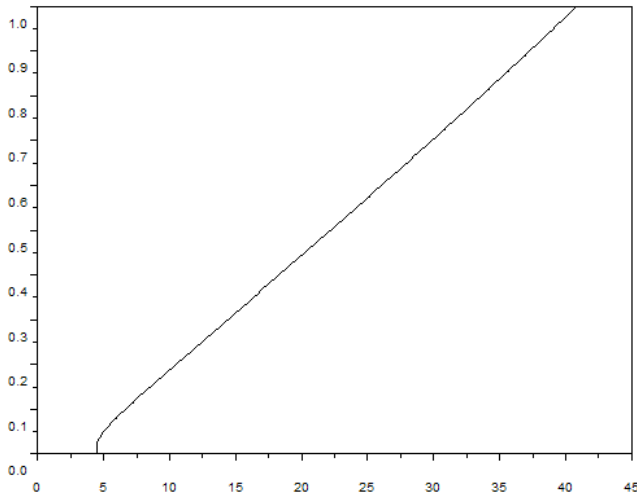


### 1.4.2 Influence de la volatilité sur les prix



$T = 1$ , strike = 100,  $S_0 = 103$ ,  $r = 1,5\%$

Prix de l'option en fonction de sigma



*sigma en fonction du prix de l'option*

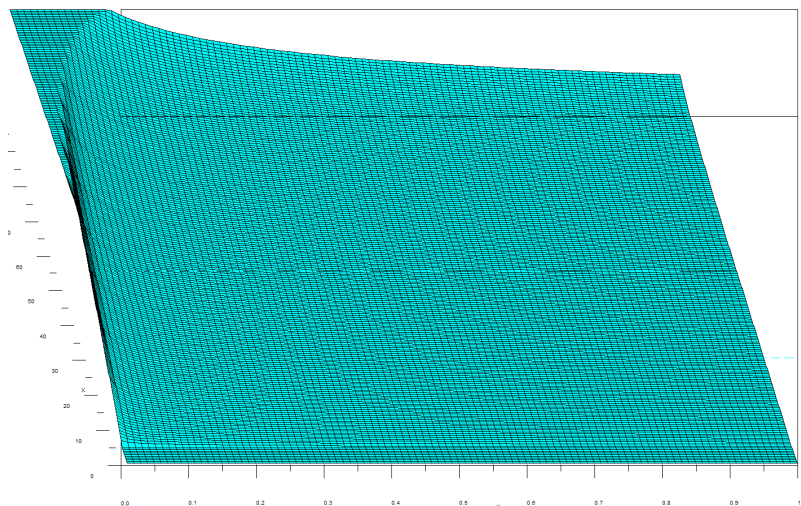
Sur ces deux graphiques (l'un est bien entendu le symétrique de l'autre par rapport à la droite d'équation  $y = x$ ), on peut se rendre compte que  $\sigma$  et  $p$  sont liés par une relation quasi-linéaire.

La croissance du prix d'une option par rapport à  $\sigma$  peut s'expliquer de la manière suivante :

- Le prix est borné inférieurement par 0
- Le prix d'une action n'est pas borné supérieurement
- Plus une action est volatile, plus elle atteindra des valeurs grandes, et plus on a de chances d'exercer l'option.

Ceci rend le call très attractif pour le client qui gagne  $(S - K)_+$  où  $K$  est fixé à l'avance. Par un raisonnement d'offre et de demande ou bien de coût pour le vendeur (intérêt à vendre une telle option), on peut donc comprendre que plus sigma est grand plus le prix de l'option est élevé. On peut relier ceci au Vega dont on a parlé précédemment, ici la courbe est quasi-linéaire de par le fait que dans Black Scholes,  $\sigma$  est une constante.

On peut aussi simuler la surface de volatilité associée, comme décrit dans le paragraphe précédent, en utilisant le modèle de Black Scholes, et ce, afin de relier le prix  $p$  aux paramètres  $T$  et  $K$  :



### 1.4.3 Volatilité empirique

Lors des simulations précédentes des trajectoires gagnantes et perdantes, on n'a a priori pas trouvé de point commun entre toutes les trajectoires gagnantes : cependant il convient de s'attarder sur la volatilité empirique réalisée.

En simulant le prix  $S_t$  du sous-jacent par rapport à une volatilité  $\sigma$ , il se peut que l'on soit sur une trajectoire ( $\omega \in \Omega$ ) telle que  $S$  varie très peu, ou au contraire très fortement, pour la même raison si on simule un mouvement brownien, on peut obtenir des trajectoires sans rebroussement.

On peut alors considérer que  $S$  a suivi l'équation :

$$dS = \mu S dt + \sigma' S dW$$

Avec  $\sigma'$  la volatilité réalisée : on cherche alors quel est ce  $\sigma'$  qui correspond le plus à notre trajectoire. On rappelle volatilité réalisée l'expression définie comme suit (uniquement pour une action qui suit Black & Scholes (BS)) :

$$\sigma'^2 = \frac{1}{\Delta t} \text{Var} \left( \ln \frac{S_{i+1}}{S_i} \right)$$

En effet, si

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

Alors en prenant la forme intégrée de Black & Scholes, on a immédiatement

$$\ln \frac{S_{i+1}}{S_i} = S(\mu - \sigma^2 / 2)\Delta t + \sigma(W_{i+1} - W_i)$$

D'où

$$\text{Var} \left( \ln \frac{S_{i+1}}{S_i} \right) = \sigma^2 \Delta t$$

Si l'actif suivait un modèle BS de paramètre  $\sigma$  que l'on ne connaît pas, on pourrait a priori le calculer ainsi connaissant  $S_t$  pour tout  $t$ .

En effet, sur une trajectoire du brownien donnée, presque sûrement,

$$\frac{1}{N} \sum (W_{t+1} - W_t)^2 \rightarrow \Delta t$$

donc quand le pas tend vers 0, on a bien la formule de la variance énoncée plus haut

Cependant ici, on ne connaît qu'un nombre fini de valeurs de  $S_t$ , et donc même si le sous-jacent suivait effectivement le modèle de Black & Scholes, on aurait  $\sigma'$  différent de  $\sigma$ . (on notera toujours  $\sigma'$  la volatilité réalisée).

Dans les simulations, même si S est simulée avec le modèle de Black Scholes et le paramètre  $\sigma$ , c'est  $\sigma'$  qui est le paramètre pertinent. On estime le prix du pay-off futur en pensant que S va avoir une volatilité  $\sigma$  mais finalement S suit une trajectoire avec une volatilité réalisée de  $\sigma'$ , ce qui fait que le pay-off n'a plus 0 comme valeur finale, mais une valeur finale non nulle.

Plus clairement, le prix d'un call est une fonction croissante de sigma, d'où les propriétés suivantes.

On pense que S va avoir une volatilité  $\sigma$  donc on fait payer le prix correspondant au client. Or S a ensuite une volatilité réalisée de  $\sigma'$ . Si  $\sigma' < \sigma$ , le client paie le call plus cher que ce qu'il aurait du.

Nous nous retrouvons donc avec  $V_{init} = V_{autofinan} + \text{résidu} (\text{résidu} > 0.)$

$V_{autofinan}$  est le prix du call avec  $\sigma'$  comme paramètre. Il permet d'obtenir un P&L final nul, sans risque. Nous nous retrouvons donc gagnants si  $\sigma' < \sigma$

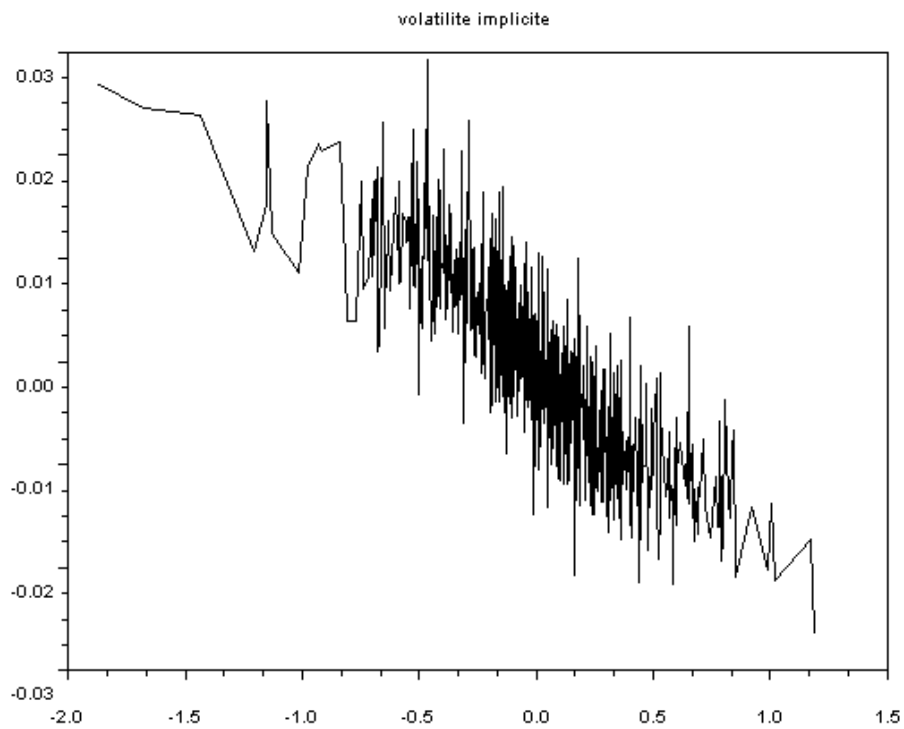
Le même raisonnement tient encore si  $\sigma' > \sigma$

Il faut bien comprendre que si S suivait véritablement le modèle de Black Scholes avec  $\sigma$  comme paramètre, puisque l'on ne fait pas de quelconque moyenne sur les trajectoires du brownien, mais que l'on n'en choisit une en particulier, alors tout peut se produire : le mouvement brownien peut être toujours croissant par exemple, ou bien il peut osciller entre -1 et 1 sur une très longue période, avec une « pente » (le brownien est p.s non dérivable) très faible. Mais si en moyenne le brownien au carré est en  $b \cdot \sqrt{t}$  en chaque t ; on peut à juste titre penser que ce brownien est plus susceptible d'avoir une volatilité b que  $\sigma$ .

Il ne faut pas confondre volatilité réalisée et implicite. Le marché pense que l'action a une volatilité égale à la volatilité implicite. Il en déduit un prix pour le call correspondant. C'est en cherchant pour quelle volatilité on obtient le prix du marché que l'on peut en déduire la volatilité implicite.

Ceci peut se faire très simplement par dichotomie, lorsque l'on a la fonction  $Prix = f(\sigma)$  qui est une fonction croissante. (Programme réalisé, code en annexe)





*graphique de  $\sigma^{t^2} - \sigma^2$  en fonction de l'erreur*

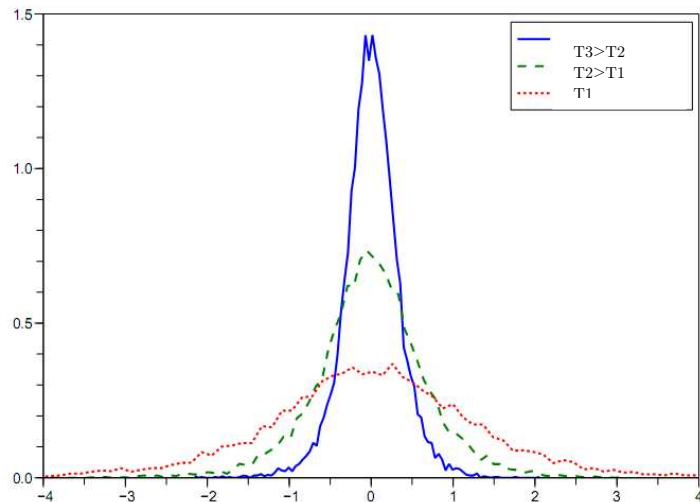
Au vu de ce graphique, l'erreur est clairement corrélée à la volatilité réalisée du sous jacent.

A la lumière de cette remarque on peut étudier de nouveau les trajectoires gagnantes et perdantes, et on peut se rendre compte qu'effectivement les trajectoires gagnantes (en bleu) semblent plus « aplaties », en ce sens qu'elles sont moins volatiles que les perdantes.

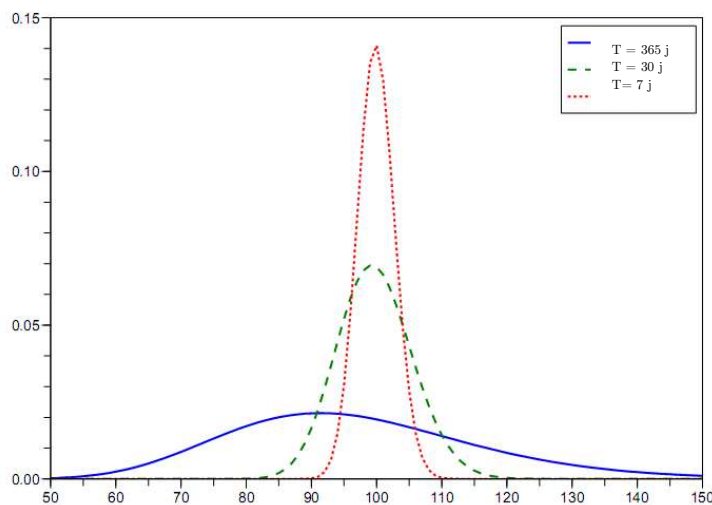
## 1.5 Application au trading

### 1.5.1 Importance de l'erreur de couverture

On montrera que l'erreur de couverture est proportionnelle à la racine du pas de temps que l'on notera  $1/n$ . Ainsi, pour diviser l'erreur par 2 il faut donc réactualiser le portefeuille 4 fois plus souvent.



*Gamma d'un call option call pour des maturités différentes.*



*Histogrammes de l'erreur de couverture pour différents pas de réactualisation.*

- L'erreur de couverture est centrée et indépendante du facteur haussier ou non de l'action
- L'erreur de couverture est d'autant plus grande que la réactualisation est faible
- Le Gamma est plus étroit et plus important pour des maturités plus importantes, c'est-à-dire proches du temps d'exercice : il est plus difficile de se couvrir juste avant l'échéance surtout au voisinage du strike.
- En Annexe, nous avons mis une démonstration concernant un encadrement de cette erreur

## 1.5.2 Les « Grecques » et le trading de volatilité

On rappelle que pour un portefeuille de call dans le modèle de Black and Scholes :

$$\Theta + rS\Delta + 1/2\sigma^2 S^2 \Gamma = rV$$

Or une stratégie classique d'une banque, voire plus précisément des market-makers qui ne parient pas pari sur le sens de l'évolution du sous-jacent, est d'avoir un delta proche de 0 : on parle de stratégie delta neutre.

$$\Theta + 1/2\sigma^2 S^2 \Gamma = rV$$

Pour une banque la plupart du temps  $V=0$  c'est-à-dire que les positions courtes financent les positions longues, d'où

$$\Theta + 1/2\sigma^2 S^2 \Gamma = 0$$

On peut aussi se ramener à cette équation de manière plus simple en prenant  $r=0$ , ce que l'on peut faire en général en considérant des valeurs actualisées : dans ce cas, on peut aussi étudier la stratégie d'un trader qui va tenter d'utiliser la volatilité pour faire un gain.

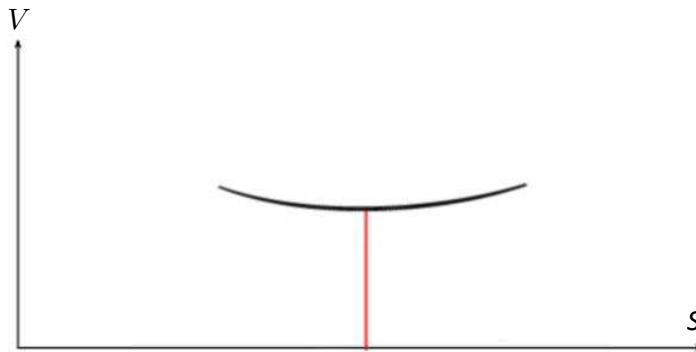
On voit donc clairement que le  $\Theta$  et le  $\Gamma$  défini précédemment d'un portefeuille delta-neutre sont de signes contraires. On rappelle qu'un  $\Theta > 0$  est un avantage car le portefeuille prend de la valeur avec le temps : de ce fait on peut se demander s'il vaut toujours mieux avoir un  $\Theta > 0$  quitte à avoir un  $\Gamma < 0$ .

Or ceci n'est pas évident car selon que le signe du gamma du portefeuille initialement, la variation du cours de l'action  $S$  aura une conséquence différente sur le delta et sur la valeur de ce portefeuille.

Si gamma est positif initialement, étant la dérivée seconde du portefeuille par rapport à  $S$ , la valeur  $V$  du portefeuille sera initialement une fonction convexe de  $S$ , et sa variation sera positive quelque soit la variation de  $S$ .

Une position gamma positive bénéficie donc de tout mouvement de cours du sous-jacent alors que les mêmes mouvements conduiraient à des baisses de la valeur d'un portefeuille gamma-négatif. De ce fait en trading, l'avantage d'un portefeuille gamma-positif est évident. En gros, en matière de volatilité, si la volatilité augmente entre le moment où le trader achète et exerce son option il est gagnant.

Cependant, cette analyse n'a de sens que localement. La position n'est assimilable à une parabole qu'aux environs du prix auquel la couverture d-neutre a été traitée. Il ne faut pas oublier que tout le challenge consiste à gérer son Thêta et son Gamma qui sont toujours de signes opposés.



La variation du portefeuille d'une position delta-neutre dû à la variation  $\delta S$  du prix s'écrit localement :

$$\delta V = \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot (\delta S)^2$$

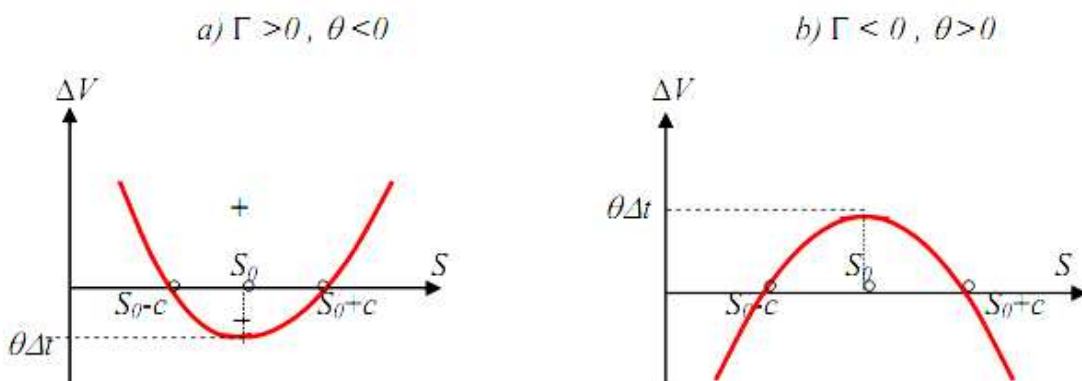
$V(S)$  est donc localement une parabole dont l'extrémum correspondse présente donc localement comme une parabole dont l'extremum correspond au cours  $S$  pour lequel  $\Delta = 0$ .

Une position gamma positive dans ce cas-là est gagnante quelque soit le sens de variation. Acheter une option est équivalent à acheter de la volatilité, donc on a intérêt à ce que la volatilité future soit la plus forte possible pour le call. Dans ce cas, le fait de gérer des options en utilisant le gamma est un pari sur la différence entre la volatilité initiale, et la volatilité future.

Cependant comme évoqué précédemment, le fait d'avoir un  $\Gamma$  positif est modéré par le fait d'avoir un  $\Theta$  négatif, et de plus, cette petite analyse n'a de sens que de manière locale. La parabole n'est une modélisation qu'au voisinage du prix pour laquelle on a fait une couverture delta-neutre, et en général non symétrique.

Nous allons désormais considérer un intervalle de temps ( $t, t+\Delta t$ ). Nous allons donc analyser le résultat d'une position en prenant en compte le temps ie en prenant en compte l'impact du  $\Theta$  sur le portefeuille.

$$\Delta V = \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot (\delta S)^2 + \Theta \cdot \Delta t$$



Pendant  $\Delta t$ , deux phénomènes se compensent :  $\Theta$  fait baisser le portefeuille (on suppose qu'on a  $\Gamma > 0$ ), tandis qu'une variation de  $S$  l'augmente. On a donc une variation  $\delta S = c$  du cours de l'action qui compense exactement la dépréciation de l'option par le temps.

En résolvant  $\Delta V = 0$ , avec l'approximation faite précédemment, on conclut que  $c$ , appelé communément point mort est égal à

$$c = \sqrt{\frac{-2 \cdot \Theta \cdot \Delta t}{\Gamma}} \text{ ie } c = \sigma S \sqrt{\Delta t}$$

On remarque que le saut minimal de  $S$ , dépend linéairement de  $\sigma$ . Plus la volatilité est importante plus on a de chance (pour un call) d'être gagnant avec cette stratégie. L'art du trader est donc de jouer avec un ensemble de paramètres qui dégagent des tendances ou sensibilités plutôt à court terme afin de dégager un profit. Nous venons de voir succinctement un exemple où on pouvait faire du trading de volatilité. Ainsi l'ensemble des modèles proposés dans cette étude aura permis de dégager des caractéristiques sur les interactions entre les différentes variables mis en jeu lorsque l'on fait du trading.

Nous allons rapidement montrer que l'analyse n'est pas tout à fait symétrique selon qu'on travaille sur les puts et les calls. Si on prend un call et un put, dont le sous-jacent vaut 500, de strike 520 et de maturité 90 jours. Le taux d'intérêt est de 9,5 % et volatilité est estimée à 5,5 % en hebdomadaire.

On a :  $T-t = 90/365 = 0,2465753$  ;  $\sigma = 0,55 \cdot \text{sqrt}(52) = 0,4$  ;  $r = 0,09075$  ;

$d1 = 0,0145127$  ;  $d2 = -0,1841101$  ;  $N(d1) = 0,50579056$  ;  $N(d2) = 0,42696356$  ;

d'où  $C = 500 N(d1) - K \cdot \exp(-r(T-t)) \cdot N(d2) = 36$

$$P = C - S + K \cdot \exp(-r(T-t)) = 44$$

Le delta du call est égal à  $N(d1) = 0,506$ , celui du put à  $-0,494$  : l'élasticité du call ( $\Delta S/C$ ) est à 7 et celle du put à  $-5,6$  : le call est 7 fois plus sensible et le put 5,6 fois plus sensible que le sous-jacent. En règle générale les options sont plus sensibles que leur sous-jacents, et il n'y a pas de symétrie Put-Call.

Ainsi, nous avons tenté de montrer quelques aspects de l'univers du trading sans pour autant avoir eu l'ambition de balayer l'ensemble du domaine, car beaucoup trop vaste. Cependant nous nous sommes attachés à illustrer l'intérêt de l'analyse du modèle de BS ainsi que ces limites. C'est pour cela que nous allons tenter d'étudier un modèle qui prend en compte une volatilité non constante : le modèle CEV

# 2. Le modèle CEV

## 2.1 Introduction

Sur les marchés européens, de manière historique on a montré que lorsque le prix de l'action montait le comportement des agents sur le marché avait comme impact une baisse de la volatilité, et inversement lorsque le prix de l'action diminue, la volatilité augmente comme si le marché s'affolait. Nous tenons à préciser que ce type de comportement n'est pas présent sur le marché asiatique où c'est plutôt l'inverse.

Le modèle CEV pour le pricing des options suppose ainsi que le prix de l'action  $S_t$  est régi par le processus de diffusion suivant :

$$dS = \mu S dt + \sigma_0 S^{\frac{\beta}{2}} dW$$

où  $dW$  est un mouvement brownien

Le CEV modèle suppose la relation suivante entre les cours des actions  $S$  et de la volatilité  $\sigma(S, t)$ .

$$\sigma(S, t) = \sigma_0 S^{\frac{(\beta-2)}{2}} \quad (*)$$

Où  $\sigma_0$  est une constant positive.

On remarque que l'élasticité de la variance par rapport au prix est égal à  $\beta - 2$ .

En effet, en considérant  $\beta - 2$  pour l'élasticité, alors on a  $\frac{d\sigma^2}{\sigma^2} = (\beta - 2) \frac{dS}{S}$ .

Après intégration des deux membres on a donc

$$\log \sigma^2 = (\beta - 2) \log S + \log \sigma_0^2, \text{ soit } \sigma = \sigma_0 S^{\frac{(\beta-2)}{2}} \text{ ie la formule } (*).$$

Remarque:

- Dans le cas  $\beta < 2$ , la volatilité et les prix sont inversement proportionnels.

- Si  $\beta = 2$ , alors l'élasticité vaut 0 et les prix sont distribués comme dans Black and Scholes.

## 2.2 Des éléments de calculs

### 2.2.1 Densité de probabilité

Si on considère désormais l'équation suivante:

$$dS = \mu(S,t)dt + \sigma(S,t)dZ$$

avec

$$\mu(S,t) = rS - aS \text{ et } \sigma(S,t) = \sigma_0 S^{\frac{\beta}{2}}, \quad 0 \leq \beta < 2$$

Alors

$$dS = (r - a)Sdt + \sigma_0 S^{\frac{\beta}{2}} dZ$$

Soit  $Y(S,t) = S^{2-\beta}$ .

Par la formule d'Ito, on a

$$\frac{\partial Y}{\partial S} = (2 - \beta)S^{1-\beta}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2} = (2 - \beta)(1 - \beta)S^{-\beta},$$

soit

$$dY = \left[ (r - a)(2 - \beta)Y + \frac{1}{2} \sigma_0^2 (\beta - 1)(\beta - 2) \right] dt + \sigma_0 (2 - \beta) \sqrt{Y} dZ.$$

On introduit la notion de densité de probabilité  $f(S_T; S_t, T > t)$ .

Si  $X_t$  suit la loi :

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dw_t$$

si  $f(X_t; X_0, t > t_0)$  est la densité de probabilité de  $X_t$  conditionnellement à  $X_0$ , alors  $f$  par construction vérifie les équations de Kolmogorov suivantes :

*Kolmogorov Backward Equation,*

$$\frac{1}{2} \sigma^2(X_0, t_0) \frac{\partial^2 f}{\partial X_0^2} + \mu(X_0, t_0) \frac{\partial f}{\partial X_0} + \frac{\partial f}{\partial t_0} = 0$$

*Kolmogorov Forward (or Fokker-Planck) Equation,*

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_t^2} [\sigma^2(X_t, t) f] - \frac{\partial f}{\partial X_t} [\mu(X_t, t) f] - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Si on utilise la 2e équation de Kolmogorov on obtient pour  $Y_t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} [\sigma_0^2 (2 - \beta)^2 Y f] - \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \left[ (r - a)(2 - \beta) Y + \frac{1}{2} \sigma_0^2 (\beta - 1)(\beta - 2) \right] f \right\}.$$

avec  $f(S_T; S_t, T > t) = f(Y_T; y_t, T > t) \cdot |J|$ ,

où

$$|J| = (2 - \beta) S^{1-\beta}.$$

En prenant

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \sigma_0^2 (2 - \beta)^2, \\ b &= (r - a)(2 - \beta), \\ h &= \frac{1}{2} \sigma_0^2 (\beta - 2)(1 - \beta), \\ x &= Y_T, \\ x_0 &= Y_t, \\ \tau &= T - t, \end{aligned}$$



On obtient

$$f(S_T; S_t, T > t) = (2 - \beta) k^{*\frac{1}{2-\beta}} (xz)^{1-\beta} \frac{1}{2(2-\beta)} e^{-x-z} \cdot I_{\frac{1}{2-\beta}}(2(xz)^{\frac{1}{2}}),$$

avec

$$k^* = \frac{2(r-a)}{\sigma_0^2(2-\beta)[e^{(r-a)(2-\beta)\tau} - 1]}, \quad x = k^* S_t^{2-\beta} e^{(r-a)(2-\beta)\tau}, \quad z = k^* S_T^{2-\beta}.$$

et  $I_k(x)$  est la fonction de Bessel modifié

$$I_k(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+k}}{r! \Gamma(r+1+k)}$$

*Remarque:* r est le taux d'intérêt sans risque, a est le taux de dividende versé de manière continue

Cette densité de probabilité transitionnelle  $f(S_T; S_t, T > t)$  a été donnée pour la première fois par Cox.

Cox a obtenu la formule suivante pour le call:

$$C = S_t e^{-\alpha\tau} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} x^n G\left(n+1 + \frac{1}{2-\beta}, k^* K^{2-\beta}\right)}{\Gamma(n+1)} - K e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} x^{n+\frac{1}{2-\beta}} G\left(n+1, k^* K^{2-\beta}\right)}{\Gamma\left(n+1 + \frac{1}{2-\beta}\right)},$$

où

$$G(m, \nu) = [\Gamma(m)]^{-1} \int_{\nu}^{\infty} e^{-u} u^{m-1} du$$

est la fonction de distribution gamma.

Nous ne ferons pas la preuve de cette formule qui a notamment été présentée par Chen and Lee. Le but est d'approcher ces formules par des fonctions du  $\chi^2$ . Une bonne approximation a été trouvée par Sankaran : nous allons donc l'utiliser directement après avoir montré les approximations trouvées par Schroder.

## 2.2.2 Formule du Call

En suivant la méthode de Schroder, avec la fonction  $f$  définie précédemment on a :

$$\begin{aligned}
 C &= e^{-r\tau} \int_K^\infty f(S_T; S_t, T > t) (S_T - K) dS_T \\
 &= e^{-r\tau} \int_K^\infty S_T f(S_T; S_t, T > t) dS_T \\
 &\quad - e^{-r\tau} K \int_K^\infty f(S_T; S_t, T > t) dS_T \\
 &= e^{-r\tau} (C_1 - kC_2).
 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
 C &= S_t e^{-a\tau} Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) \\
 &\quad - K e^{-r\tau} \left(1 - Q\left(2x, \frac{2}{2-\beta}, 2y\right)\right)
 \end{aligned}$$

Formule valable pour tout  $\beta < 2$ ,

où  $y = k^* K^{2-\beta}$ ,  $x = k^* S_t^{2-\beta} e^{(r-1)(2-\beta)\tau}$ ,  $k^* = \frac{2(r-a)}{\sigma_0^2 (2-\beta) [e^{(r-a)(2-\beta)\tau} - 1]}$  and  $a$  défini comme précédemment

D'après Schroder  $Q$  est défini ainsi :

$$\begin{aligned}
 &Q(z; \nu, y) \\
 &= \int_z^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{\nu-2}{4}} I_{\frac{\nu-2}{2}}(\sqrt{ky}) \cdot e^{-\frac{k+y}{2}} dy \\
 &= \int_z^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{\nu-2}{4}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{ky}\right)^{\frac{\nu-2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4} ky\right)^n}{n! \Gamma\left(\frac{\nu+2n}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{k+y}{2}} dy \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}} \frac{k^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \int_z^\infty \frac{e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\nu+2n}{2}-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu+2n}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+2n}{2}\right)} dy \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}} \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \int_z^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu+2n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+2n}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\nu+2n}{2}-1} dy \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{k}{2}} \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} Q(z; \nu+2n, 0),
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
& Q(z; \nu + 2n, 0) \\
&= \int_z^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu+2n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+2n}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\nu+2n}{2}-1} dy \\
&= \int_{\frac{z}{2}}^\infty \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu+2n}{2}\right)} e^{-y} y^{\frac{\nu+2n}{2}-1} dy \\
&= G\left(n + \frac{\nu}{2}, \frac{z}{2}\right).
\end{aligned}$$

## 2.2.3 Approximations

### 2.2.3.1 Approximation de Schroder

Par un algorithme on peut approcher la solution comme l'a fait Schroder en utilisant des variables spécifiques. Dans notre cas, on s'intéressera à l'approximation du  $\chi^2$  en signalant les principales étapes.

L'approximation a été faite de la manière suivante:

$$Q(z, 1, k) = \int_z^\infty P(y, 1, k) dy$$

avec  $z \sim N(0, 1)$ ,  $Y = (z + \delta)^2$ ,  $k = \delta^2$  alors

$$\begin{aligned}
Q(z, 1, k) &= \int_z^\infty f_Y(y) dy \\
&= 1 - F_Y(z) \\
&= 1 - P(Y \leq z) = 1 - P((z + \delta)^2 \leq z) \\
&= 1 - P(|z + \delta| \leq \sqrt{z}) \\
&= 1 - P(-\delta - \sqrt{z} \leq z \leq -\delta + \sqrt{z}) \\
&= 1 - [N(\sqrt{z} - \delta) - N(-\delta - \sqrt{z})] \\
&= N(-\sqrt{z} - \sqrt{k}) + 1 - N(\sqrt{z} - \sqrt{k}) \\
&= N(\sqrt{k} - \sqrt{z}) + N(-\sqrt{k} - \sqrt{z}).
\end{aligned}$$

Où N est la distribution normale classique

Schroder résume ainsi les premières distributions :

$$\begin{aligned}
 Q(z; 1, \kappa) &= N(\sqrt{\kappa} - \sqrt{z}) + N(-\sqrt{\kappa} - \sqrt{z}) \\
 Q(z; 3, \kappa) &= Q(z; 1, \kappa) + [N'(\sqrt{\kappa} - \sqrt{z}) - N'(\sqrt{\kappa} + \sqrt{z})]/\sqrt{\kappa} \\
 Q(z; 5, \kappa) &= Q(z; 1, \kappa) + \kappa^{-3/2}[(\kappa - 1 + \sqrt{\kappa z}) \cdot N'(\sqrt{\kappa} - \sqrt{z}) \\
 &\quad - (\kappa - 1 - \sqrt{\kappa z}) \cdot N'(\sqrt{\kappa} + \sqrt{z})].
 \end{aligned}$$

Avec  $N'$  la densité de la fonction normale.

Remarque : Cependant si on cherche le  $\nu$  tel que  $\nu=1,3,5$  cela nous fait que peu de possibilités de simulations pour beta : dans la formule de C

$\nu = 2 + \frac{2}{2-\beta}$  ou  $\frac{2}{2-\beta} \rightarrow$  la seule solution pour utiliser les formules précédentes est seulement avec beta = 0 et dans ce cas on retrouve Black and Scholes.

### 2.2.3.2 Approximation de Sankaran

Sankaran a lui montré qu'on pouvait approcher de la manière suivante  $Q$  sachant que pour une distribution du  $X^2$   $\left(\frac{\chi^2}{\nu+k}\right)^h$  est approximativement normal si on prend les valeurs suivantes

$$\mu = 1 + h(h-1)p - h(2-h)m \frac{P^2}{2}$$

$$\sigma^2 = h^2 2P[1+mP],$$

$$h = 1 - \frac{2}{3}(\nu+k)(\nu+3k)(\nu+2k)^{-2},$$

$$P = \frac{\nu+2k}{(\nu+k)^2},$$

$$m = (h-1)(1-3h).$$

Avec les approximations suivantes on trouve que;

$$\begin{aligned}
& Q(z; \nu, k) \\
&= P(\mathcal{X}'^2 > z) = P\left(\frac{\mathcal{X}'^2}{\nu+k} > \frac{z}{\nu+k}\right) \\
&= P\left(\left(\frac{\mathcal{X}'^2}{\nu+k}\right)^h > \left(\frac{z}{\nu+k}\right)^h\right) \\
&= P\left(\frac{\left(\frac{\mathcal{X}'^2}{\nu+k}\right)^h - \mu}{\sigma} > \frac{\left(\frac{z}{\nu+k}\right)^h - \mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\left(\frac{z}{\nu+k}\right)^h - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu - \left(\frac{z}{\nu+k}\right)^h}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1 - hP[1 - h + 0.5(2 - h)mP - \left(\frac{\nu+k}{z}\right)^h]}{h\sqrt{2P(1+mP)}}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne une formule plus simple à appliquer a priori pour des simulations car  $z, \nu, k$  peuvent prendre une infinité de valeurs, pourvu que ces variables satisfassent aux conditions du problèmes.

**Ce sont ces formules que l'on va utiliser pour la simulation numérique**

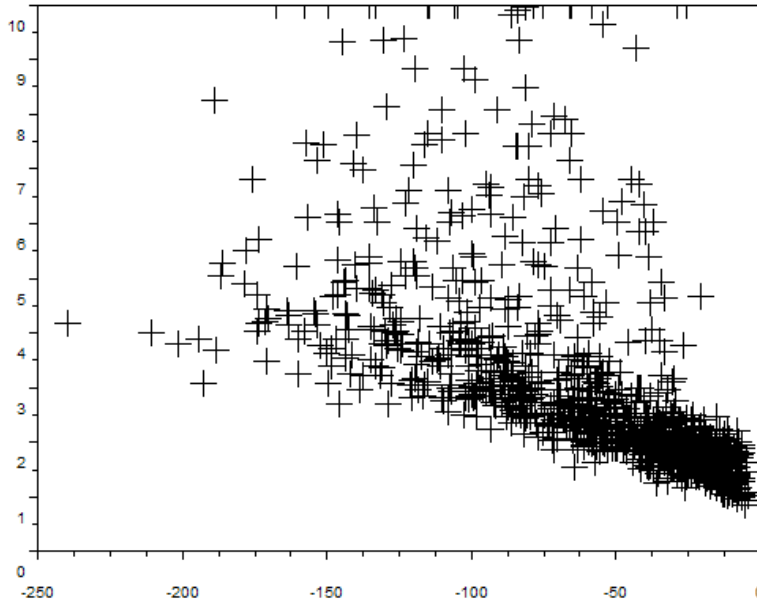
On rappelle que

$$\begin{aligned}
C &= S_t e^{-a\tau} Q\left(2y; 2 + \frac{2}{2-\beta}, 2x\right) \\
&\quad - K e^{-r\tau} \left(1 - Q\left(2x, \frac{2}{2-\beta}, 2y\right)\right) \\
\text{où } y &= k^* K^{2-\beta}, \quad x = k^* S_t^{2-\beta} e^{(r-a)(2-\beta)\tau}, \quad k^* = \frac{2(r-a)}{\sigma_0^2 (2-\beta) [e^{(r-a)(2-\beta)\tau} - 1]}
\end{aligned}$$

on prendra ici  $a=0$  pour simplifier les calculs

## 2.3 Simulations

### 2.3.1 Volatilités



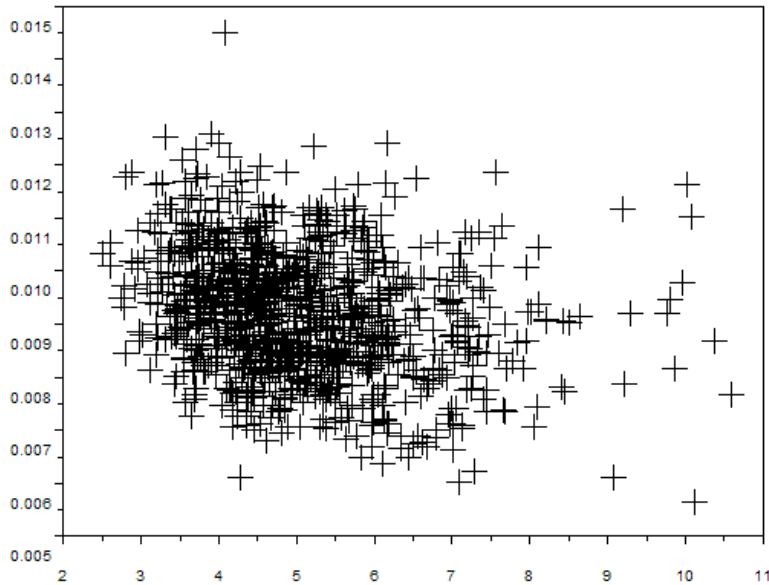
Volatilité réalisée au carré en fonction du P&L.

Avec  $\beta > 2$ , on est toujours perdant en utilisant la technique du portefeuille autofinçant décrit dans le modèle de Black Scholes à une action qui suit le modèle CEV. Ceci est confirmé par le fait que la volatilité réalisée est toujours beaucoup plus élevée que la volatilité réelle de l'action. (Elle vaut 0,3 donc 0,09 au carré, qui est bien inférieur à toutes les valeurs sur le graphique).

On rappelle volatilité réalisée l'expression définie comme suit (uniquement pour une action qui suit Black & Scholes(BS)) :

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Delta t} \text{Var}\left(\ln \frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$$

Ici on va étudier la volatilité du modèle CEV.



*Volatilité réalisée  
au carré.*

Il faut soustraire ,09 pour obtenir  $\text{vol}_{\text{realisee}}^2 - \text{vol}^2$

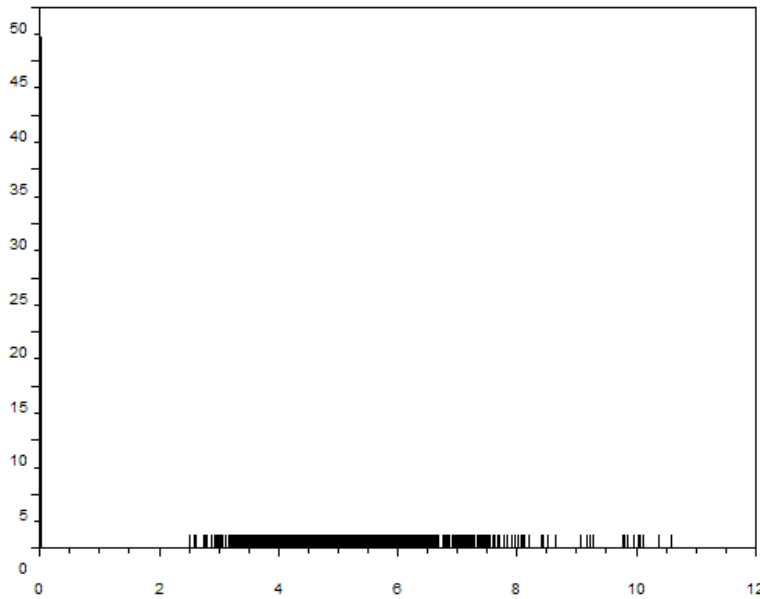
Si  $\beta < 2$ , on est toujours gagnant en modélisant une action qui se conduit comme CEV avec un modèle de Black Scholes.

Ceci peut paraître incongru : on possède une stratégie gagnante à chaque coup !!

L'explication réside dans le fait que le prix d'un call évalué avec BS est plus élevé que le prix d'un call évalué avec CEV, pour  $\beta < 2$ . De fait, on possède une mise de départ plus importante que la mise qui permet d'avoir un portefeuille autofinçant. Bien que notre réplcation ne soit pas optimale, elle reste satisfaisante puisque l'on est encore gagnant à maturité.

Pourtant : si l'on s'intéresse à la volatilité réalisée, on se rend compte que  $\text{vol}_{\text{realisee}}^2 > \text{vol}^2$  en général. (ie les points de ce nuage sont souvent au dessus de 0,09 en ordonnée, et  $0,09 = \sigma^2$ ). Ceci signifie que l'on a eu une stratégie à perte (sans compter le fait que l'on a pas la stratégie adaptée au cours de l'action).

Il est donc remarquable que sur un nombre de simulations aussi grand, en partant d'un prix plus fort que « prévu » et en appliquant une stratégie perdante dans la majorité des cas, que l'on soit toujours gagnant.

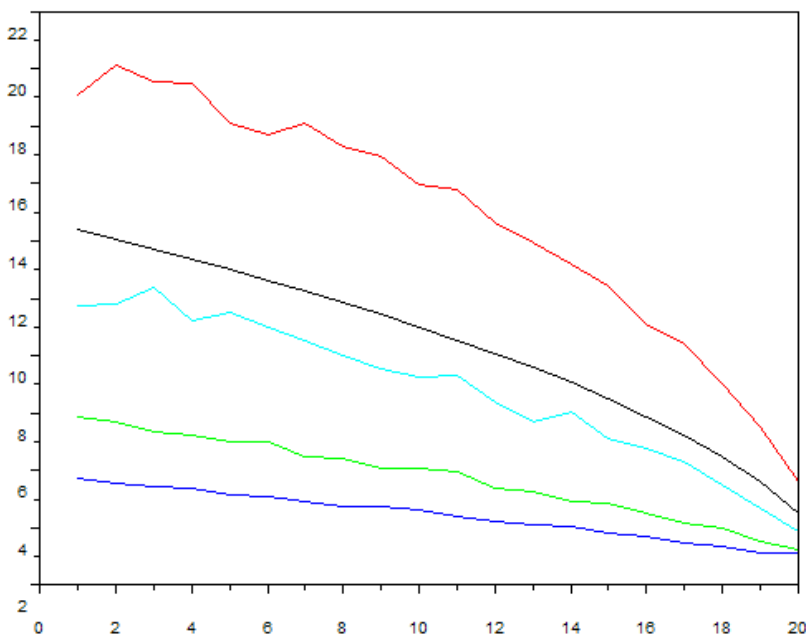


*Repartition  
statistique du  
P&L.*

*On distingue en  
0 une très forte  
probabilité.*

Pour des raisons de lisibilité, le graphe a été coupé près de 0 : la plus grande concentration de valeurs s'y trouvait. La stratégie se révèle donc toujours gagnante, mais avec une très forte probabilité d'avoir un très faible gain proche de 0.

### 2.3.1 Impact du facteur $\beta$ et de la maturité



*Modele CEV : Prix d'un call  
en fonction de sa maturite, et  
de beta*

*Ici  $K = 100$ ,  $So = 103$ . On a  
divisé l'unité de temps en  
abscisse en 20, ie  $T=1$  pour  
20 en abscisse. Le prix est  
calculé a la date  $t$  ie  
 $C(So, K, T-t)$  est représenté.*



Valeurs de beta :

rouge: 2,3 - noir : 2 (Black Scholes) - cyan : 1,8 - vert : 1,6- bleu : 1,3

$$\text{Rappel : } dS = \mu S dt + \sigma_0 S^{\frac{\beta}{2}} dW$$

Plus beta est fort et plus le prix du call est élevé (graphe). Ceci rejoint un raisonnement tenu précédemment ou l'on expliquait que plus une action est volatile et plus le prix de l'option associé est fort.

Il est agréable de voir que les prix des options convergent avec le temps vers  $(S_0 - K)$ , ce qui est naturel : lorsque l'on tend vers la maturité, l'option tend vers sa valeur intrinsèque.

Afin de calculer les prix des options nous avons utilisé la "formule" suivante :

$C = E(\exp(-r \cdot T) (S_T - K)^+)$  : le prix d'un call est l'espérance du pay-off actualisé.

Nous avons approché l'espérance par la moyenne sur des simulations de S.

# Conclusion

Cet enseignement d'approfondissement nous a permis de travailler en profondeur sur des modèles assez classiques comme le modèle de Black & Scholes ou le modèle CEV. Nous avons pu nous rendre compte de la manière dont travaillaient les ingénieurs financiers afin de pricer des options européennes, et d'élaborer des stratégies selon la volonté de se couvrir d'un risque ou au contraire de parier sur la hausse ou la baisse de différents facteurs, notamment la volatilité.

Ceci nous a amené à étudier les « Grecques », instruments financiers mathématiques utilisés quotidiennement par l'ensemble des acteurs d'un Front Office, mais aussi à comprendre l'importance d'une réactualisation fréquente d'un portefeuille lors d'une stratégie de couverture grâce à l'étude d'un article de E. Dermann et la nécessité de considérer l'ensemble des facteurs agissant sur le pricing d'une option afin de mieux cerner son évolution.

Nous nous sommes intéressés à un modèle particulier de volatilité stochastique, tout en ayant développés des techniques algorithmiques applicables très rapidement à d'autres modèles, comme par exemple le modèle de Heston. L'intérêt aura été de créer un ensemble assez large de programmes, du plus simple au plus complexe, permettant ainsi d'illustrer notre propos à l'aide de simulations probantes.

En définitive, ce travail sur le trading de volatilité nous a permis de découvrir pleinement le domaine de la finance de marché et de nous familiariser avec les notions et outils qui y sont couramment utilisés. Nous avons mis en pratique nos connaissances acquises durant le cours de finance et d'initiation au calcul stochastique, ainsi que notre faculté à programmer des algorithmes. Nous avons ainsi pu mesurer le travail d'un ingénieur quantitatif au sein d'un département de recherche d'une banque, expérience que nous aimerions renouveler lors du stage proposé par l'Ecole à la fin de ce Programme d'Approfondissement.

# Bibliographie

- [1] N. Touzi  
*Cours de l'Ecole Polytechnique*  
Introduction au calcul stochastique
- [2] E. Derman  
*Goldman Sachs*  
Quantitative Strategies Research Notes
- [3] J.C. Hull  
*Options, Futures, Other Derivatives.*  
Prentice-Hall, Upper Saddle River, fourth edition.
- [4] P. Tankov  
*Calibration de modèles et couverture de produits dérivés*  
Cours de DEA Paris VII
- [5] M. Schroder  
*Computing the CEV Option Pricing Formula*  
The journal of Finance, Vol. 44, No.1, Mar. 1989
- [6] F. Black, M. Scholes  
*The pricing of options and corporate liabilities*  
Journal of Political Economy, 81, n ° 3, 637-654, 1973.
- [7] J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein  
*Options pricing : a simplified approach*  
Journal of Financial Economics, 7, 229-263, 1979.
- [8] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picque, S. Shreve  
*Robustness of the Black and Scholes Formula*  
Mathematical Finance, vol. 8, Issue 2, 93-126, 1998.
- [9] J.C. Cox  
*The constant elasticity of variance option pricing mode*  
Journal of Portfolio Management, 22 (1996), pp. 15–17.
- [10] M. Sankaran  
*Approximations to the Non-Central Chi-Square Distribution*  
Biometrika, 50, 199-204
- [11] R.R. Chen and C.F. Lee  
*A constant elasticity of variance (CEV) family of stock price distributions in option pricing: review and integration*  
J. Finan. Stud. 1 (1993), pp. 29–51.

# Annexe 1: *code des simulations*

## Trajectoire, tracking error BS et comparaison gaussienne

Ce programme permet d'obtenir le P&L final d'un portefeuille autofinancant, lorsque l'action suit un profil de type Black Scholes.

Il trace l'histogramme de la répartition statistique du P&L, ainsi que la gaussienne associée a une telle loi. Les moments d'ordre 2, 3 et 4 de la distribution sont aussi calculés.

```
function [res]= simuler_bs(nb, pas, gT, K, r, So, mu, sigma, tra)
res = zeros(1,nb);
maxii = floor(gT/pas);

for kk = 1:nb
S = zeros(1, maxii+1);
  S(1) = So;
  for i=1:(maxii)
    S(i + 1) = S(i) * exp((mu - .5*sigma^2)*pas + sqrt(pas)*sigma*rand(1,1,"normal"));
  end
d1 = (log(So/K)+r*gT)/(sigma*sqrt(gT)) + 1/2*sigma*sqrt(gT);
d2 = d1 - sigma * sqrt(gT);
p = So * phi(d1) - K * exp(-r * gT) * phi(d2);
V = p;
  for l = 0:(maxii - 1)
    ratio = delta_bs(gT*1/maxii, S(l + 1), gT, r, K);
    V = ratio*S(l + 2) + (V - ratio * S(l + 1))*exp(r*pas);
  end
res(kk) = (V - positif(S(maxii+1) - K));

// si l'on décommente les quelques lignes qui suivent on peut visualiser les cours d'action
// qui menent a des P&L extrémaux

//if (res(kk) > 1.5) then
//disp("oui");
//disp(res(kk));
//plot2d(1:(maxii+1), S, 2);
//lebool=2;
//end

//if (res(kk) < -1.5) then
//disp("oui bis");
//disp(res(kk));
```

```

//plot2d(1:(maxii+1), S, 3);
//lebool=2;
//end

end
if (tra > .5) then
histplot(linspace(-1000, 1000, 1), res)
end
moy = sum(res)/nb;
disp(moy);
sigg = (res - moy)*((res - moy)')/nb;
disp(sigg);
sigg = sqrt(sigg);
x = linspace(-5, 5, 500);
y = 1/(sqrt(2*%pi)*sigg)*exp(-x^2/(2*sigg^2));
plot2d(x,y,5);
//moment ordre 4
rrr = 0;
for k = 1:nb
rrr = rrr + (res(k) - moy)^4;
end
disp(sqrt(sqrt(rrr/nb)));
endfunction

function [res] = delta_bs(t, S, gT, r, K)
res = phi((log(S/K)+r*(gT - t))/(sigma*sqrt(gT - t)) + 1/2*sigma*sqrt(gT-t));
endfunction

function [res] = phi(x) // intgl -inf à x de e^(-t^2/2)/ sqr(2pi)
res = 0;
if x >= 0 then
res = 1/2 + 1/2 * erf(x/sqrt(2));
else
res = 1/2 - 1/2 * erf((-x)/sqrt(2));
end
endfunction

function [res] = positif(x)
res=max(x, 0);
endfunction

function [res] = iif(a, b, x)
res = x;
if (a) then
res = b;
end
endfunction

simuler_bs(10000, 0.01,1,102, 0.06,100,0.3, 0.3,1 )

```

## Courbes de pricing

Ce programme permet de visualiser sur un seul graphique le prix d'un call évalué suivant le modèle CEV pour différentes valeurs de beta, ainsi que pour Black Scholes.

Les prix des call du modèle CEV sont calculés en tenant compte du fait que prix = espérance du pay-off actualisé, que l'on assimile à la moyenne sur 10000 simulations.

```
//lesprix.sci

function [res] = calculer_prix(pas, gT, K, r, So, mu, sigma, tra)

maxii = floor(gT / pas);
zzz = zeros(6, maxii)

for i = 1:maxii
t = gT - (i - 1) * pas;
// black scholes
d1 = (log(So/K)+r*t)/(sigma*sqrt(t)) + 1/2*sigma*sqrt(t);
d2 = d1 - sigma * sqrt(t);
p = So * phi(d1) - K * exp(-r * t) * phi(d2);
zzz(1, i) = p;

zzz(2, i) = prix_call(1.3, sigma, .01, So, r, t, mu, K);
zzz(3, i) = prix_call(1.6, sigma, .01, So, r, t, mu, K);
zzz(4, i) = prix_call(1.9, sigma, .01, So, r, t, mu, K);
zzz(5, i) = prix_call(2.2, sigma, .01, So, r, t, mu, K);
zzz(6, i) = prix_call(2.6, sigma, .01, So, r, t, mu, K);
zzz(6, i) = prix_call(2.8, sigma, .01, So, r, t, mu, K);
end

res = zzz;

if tra > .5 then
for i = 1:6
plot2d(1:maxii, zzz(i, :), i);
end
end

endfunction

function [res] = phi(x) // intgl -inf à x de e^(-t^2/2)/ sqrt(2pi)
res = 0;
if x >= 0 then
res = 1/2 + 1/2 * erf(x/sqrt(2));
else
res = 1/2 - 1/2 * erf((-x)/sqrt(2));
```

```
end
endfunction
```

```
function [res] = prix_call(beta, sigma, pas, So, r, T, mu, strike)
maxii = floor(T/pas);
nb = 3000;
nfin = 3000;
vect = zeros(1, nb);
for kk = 1:nb
    oo = 3;
    S = So;
    for i = 1:(maxii)
        if oo >= 0 then
            S = S + S * mu * pas + exp(.5 * beta * log(S)) * sqrt(pas)*sigma*rand(1,1,"normal");
            if (S <= 0) then
                oo = -2;
            end
        end
    end
    vect(1, kk) = max(S-strike, 0);
    if oo < 0 then
        vect(1, kk) = 0;
        nfin = nfin-1;
    end
    if vect(1, kk) > 200 then
        vect(1, kk) = 0;
        nfin = nfin-1;
    end
end
end;
res = exp(-r * T) * sum(vect(1,:))/nb;
endfunction
```

## Couverture option de CEV

Le cours du sous jacent,  $S$ , suit ici le modèle CEV et on essaye de couvrir l'option avec un portefeuille autofinçant de Black Scholes. Les résultats sont impressionnants suivant que  $\beta > 2$  ou  $\beta < 2$ .

Le programme trace la loi de répartition du P&L final et la volatilité réalisée.

```
function [res]= simuler_bs(nb, pas, gT, K, r, So, mu, sigma, tra, betta)
res = zeros(2,nb);
maxii = floor(gT/pas);

for kk = 1:nb
    S = zeros(1, maxii+1);
    S(1) = So;
    for i = 1:(maxii)
        S(i+1) = 0;
        while 1==1
```

```

    S(i + 1) = S(i) + S(i) * mu * pas + exp(.5 * betta * log(S(i))) *
sqrt(pas)*sigma*rand(1,1,"normal");
    if S(i+1)>0 then break; end
    end
// S(i + 1) = S(i) * exp((mu - .5*sigma^2)*pas + sqrt(pas)*sigma*rand(1,1,"normal"));
end

d1 = (log(So/K)+r*gT)/(sigma*sqrt(gT)) + 1/2*sigma*sqrt(gT);
d2 = d1 - sigma * sqrt(gT);
p = So * phi(d1) - K * exp(-r * gT) * phi(d2);
V = p;
for l = 0:(maxii - 1)
    ratio = delta_bs(gT*l/maxii, S(l + 1), gT, r, K);
    V = ratio*S(l + 2) + (V - ratio * S(l + 1))*exp(r*pas);
end
res(1, kk) = (V - positif(S(maxii+1) - K));

vari = zeros(1, maxii);
for www=1:maxii
    vari(1, www) = log(S(www+1)/S(www));
end
res(2, kk) = (vari * vari')/(pas * maxii);
if res(2, kk) > 10 then res(2, kk) = 10; end
end

if (tra > .5) then
histplot(linspace(-1000, 1000, 1), res)
end

// variance realisee
disp(mean(res(2,:)));
[qq, rr] = sort(res(1, :));
plot2d(res(1,rr(:)), res(2, rr(:)),-1);
endfunction

function [res] = delta_bs(t, S, gT, r, K)
x = (log(S/K)+r*(gT - t))/(sigma*sqrt(gT - t)) + 1/2*sigma*sqrt(gT-t);
res = phi(x);
endfunction

function [res] = phi(x) // intgl -inf à x de e^(-t^2/2)/ sqr(2pi)
res = 0;
if x >= 0 then
res = 1/2 + 1/2 * erf(x/sqrt(2));
else
res = 1/2 - 1/2 * erf((-x)/sqrt(2));
end
endfunction

function [res] = positif(x)
res=max(x, 0);
endfunction

function [res] = iif(a, b, x)
res = x;
if (a) then
res = b;
end
endfunction

```



# Surface de volatilité et prix du call par rapport à sigma et inversement

Ce programme trace une courbe en 3 dimensions de la volatilité implicite d'une action suivant le prix et le temps restant avant la maturité.

Connaissant la fonction donnant le prix d'une option en fonction de sa volatilité et de l'échéance, nous inversons cette fonction pour connaître la volatilité, par dichotomie.

Effectivement, le prix est une fonction croissante de la volatilité. Il l'est aussi en fonction de l'échéance.

```
function [res] = courbe_sigma(K, r, So)
// sigma en fonction du prix et du temps
// on inverse juste la dernière ligne !! y = f(x) dans la fonction du dessus. ici x = f-1(y)
sigma = zeros(200, 100);
for p = 1:200
    for t = 1:100
        sigma(p, t) = inverser_bs(t/100, K, r, So, p/2);
    end
end
plot3d((1:200)/2, (1:100)/100, sigma);
res = sigma;
endfunction
```

```
// fonction inversion
```

```
function [res]= inverser_bs(gT, K, r, So, p)
// sigma en fonction du prix
a = 0;
b = 10;
while ((b - a) > .001)
    sigma = (a+b) / 2;
    p_trouv = prix(gT, K, r, So, sigma);
    if (p_trouv < p) then
        a = sigma;
    else
        b = sigma;
    end
end
res = sigma;
endfunction
```

```
// FONCTIONS BASIQUES
```

```
function [res] = prix(gT, K, r, So, sigma)
d1 = (log(So/K)+r*gT)/(sigma*sqrt(gT)) + 1/2*sigma*sqrt(gT);
d2 = d1 - sigma * sqrt(gT);
res = So * phi(d1) - K * exp(-r * gT) * phi(d2);
```

```

endfunction

function [res] = phi(x) // intgl -inf à x de e^(-t^2/2)/ sqrt(2pi)
res = 0;
if x >= 0 then
res = 1/2 + 1/2 * erf(x/sqrt(2));
else
res = 1/2 - 1/2 * erf((-x)/sqrt(2));
end
endfunction

```

## Programmes pour le modele CEV

Nous mettons ici 4 programmes que nous avons utilise pour simuler convenablement le modele CEV, ie calculer le prix d'un call et le delta de couverture.

Methodes :

Programme 1 : formules explicites de resolution de l equation de portefeuille autofinancant

programme 2 : methode statistique de calcul de prix du call

programme 3 : combinaison des 2 premiers afin de simuler des portefeuilles autofinancants, comme nous l avons fait poru Black Scholes.

Programme 4 : resolution numerique de l equation de portefeuille autofinancant.

### Prix du Call en fonction (CEV) : 1

Ce premier programme permet de calculer le prix du call en fonction des parametres usuels : T, sigma, beta, K, So, mu, r. Il a été implémenté suivant les articles de Schroder et Sankaran Cependant il ne fonctionne pas puisque le prix donne n est pas a la bonne échelle (il est négatif). Le prix a par contre une dérivée entre 0 et 1, ce qui nous permettra de calculer le delta de couverture de l option dans le programme 3.

```

function res= pricer_cevf(gT, K, r, So, mu, sigma, betta)

kstar = 2*r/(sigma^2*(2-betta)*(exp(r*(2-betta)*gT)-1)); /// variables utilisées dans la formule
y =kstar*K^(2-betta);
x = kstar*So^(2-betta)*exp((r*gT)*(2 - betta));//rq --> implémentation apres

v1 = 2+2/(2 - betta);
k1 = 2*x;
v2 = 2/(2 - betta);
k2 = 2 * y;

//function res = QQ(t, S, gT, r, K,z,v,k)
// p1 = So * Q(2*y,v1,k1)- K * exp(-r * gT) * (1-Q(2*x,v2,k2)); // calcul avec phi u-zetc(...)
beta<2
p=- ( So * QQ(2*y,v1,k1)- K * exp(-r * gT) * (1-QQ(2*x,v2,k2))); // calcul avec phi ( 1-... )etc.....

```

```

disp(p); // on affiche celle globale
disp(p1); // 2 prix calculés par 2 formules différentes
res = p;
endfunction

function res = QQ(z,v,k)
res = phi((1-h(v,k)*pq(v,k))*(1-h(v,k)+0.5*(2-h(v,k))*mq(h(v,k))*pq(v,k))-
((v+k)/z)^h(v,k)/(h(v,k)*sqrt(2*pq(v,k)*(1+mq(h(v,k))*pq(v,k)))); // ici on a changé la formule
de delta
endfunction

function res= phi(x) // intgl -inf à x de e^(-t^2/2)/ sqrt(2pi)
res = 0;
if x >= 0 then
res = 1/2 + 1/2 * erf(x/sqrt(2));
else
res = 1/2 - 1/2 * erf((-x)/sqrt(2));
end
endfunction

function QQ2 = Q(z,v,k)
QQ2=phi((muq(h(v,k),pq(v,k))-(z/(v+k))^h(v,k))/sigmaq(h(v,k),pq(v,k))); // formule avec mu-
z(v+k) etc..
endfunction

function hhh = h(v,k)
hhh = 1-2/3*(v+k)*(v+3*k)*1/(v+2*k)^2;
endfunction

function pqq = pq(v,k)
pqq = (v+2*k)/(v+k)^2;
endfunction

function mqq = mq(u)
mqq = (u-1)*(1-3*u);
endfunction

function muqq = muq(u,p)
muqq = 1+u*(u-1)*p -u*(2-u)*mq(u)*p^2/2;
endfunction

function sigmaqq = sigmaq(u,p)
sigmaqq = u^2*2*p*(1+mq(u)*p);
endfunction

```

## Prix du Call en fonction (CEV) : 2

Ici la methode statistique permet de calculer le prix du call. Elle est malheureusement trop longue pour avoir calculer de nombreux prix dans un programme de simulation d envergure. D autre part elle reste tres imprecise puisque sur 10000 simulations le prix varie encore a 0,5 pres, ce qui empeche de calculer le delta de couverture par la formule  $\text{delta} = dC/dS$ .

```
function [res] = pricer_cevf_statistique(T, strike, r, So, mu, sigma, betta, pas)
maxii = floor(T/pas);
nb = 10000;
nfin = 10000;
vect = zeros(1, nb);
for kk = 1:nb
    oo = 3;
    S = So;
    for i = 1:(maxii)
        if oo >= 0 then
            S = S + S * mu * pas + exp(.5 * betta * log(S)) * sqrt(pas)*sigma*rand(1,1,"normal");
            if (S <= 0) then
                oo = -2;
            end
        end
    end
    vect(1, kk) = max(S-strike, 0);
    if oo < 0 then
        vect(1, kk) = 0;
        nfin = nfin-1;
    end
    if vect(1, kk) > 200 then
        vect(1, kk) = 0;
        nfin = nfin-1;
    end
end;
res = exp(-r * T) * sum(vect(1,:))/nb;
endfunction
```

## Prix du Call en fonction (CEV) : 3

Nous combinons ici les 2 programmes precedants pour tracer, comme dans le premier programme suivant Black Scholes, la courbe de la repartition en loi du P&L final, ainsi que la moyenne de celui-ci et les parametres adjacents.

Le prix initial est donne par la methode statistique avec l'esperance du pay off actualisé.

Le delta de couverture est calcule par la derivee du prix du call :  $dC/dS$ , ou l on a utilise le premier programme pour calculer le prix. On s est en effet rendu compte que le prix calcule etait negatif, mais avait une derivee entre 0 et 1, et qu a une constante pres il pouvait donc etre le "vrai" prix.

La courbe finale est effectivement une “courbe en cloche” centrée en 0, ce qui indique que le premier programme n est pas complètement aberrant. La courbe est donnée à la fin de ce programme.

```

function res= simuler_cevf(nb, pas, gT, K, r, So, mu, sigma, tra, betta)
res = zeros(1,nb);
maxii = floor(gT/pas);

p = pricer_cevf_statistique(gT, K, r, So, mu, sigma, betta, .01);
disp("calcul");
for kk = 1:nb
    S = zeros(1, maxii+1);
    S(1) = So;
    for i = 1:(maxii)
        S(i + 1) = S(i) + S(i) * mu * pas + exp(.5 * betta * log(S(i))) *
sqrt(pas)*sigma*rand(1,1,"normal");
    end

V = p;
for l = 0:(maxii - 1)
    ratio = ledelta(gT - gT*l/maxii, K, r, S(l + 1), mu, sigma, betta);
    V = ratio*S(l + 2) + (V - ratio * S(l + 1))*exp(r*pas);
end
res(kk) = (V - positif(S(maxii+1) - K));

end

if (tra > .5) then
histplot(linspace(-1000, 1000, 1), res)
end

moy = sum(res)/nb;
disp(moy);
sigg = (res - moy)*((res - moy)')/nb;
disp(sigg);
sigg = sqrt(sigg);
x = linspace(-5, 5, 500);
y = 1/(sqrt(2*%pi)*sigg)*exp(-(x - moy)^2/(2*sigg^2));
plot2d(x,y,5);
//moment ordre 4
rrr = 0;
for k = 1:nb
    rrr = rrr + (res(k) - moy)^4;
end
disp(sqrt(sqrt(rrr/nb)));
endfunction

function res = ledelta(t, K, r, So, mu, sigma, betta)
dhh = .005;
p = pricer_cevf(gT, K, r, So-dhh, mu, sigma, betta);

```

```

    p2 = pricer_cevf(gT, K, r, So+dhh, mu, sigma, betta);
    res = (p2 - p)/dhh;
endfunction

```

```

function res= pricer_cevf(gT, K, r, So, mu, sigma, betta)

```

```

    kstar = 2*r/(sigma^2*(2-betta)*(exp(r*(2-betta)*gT)-1)); /// variables utilisées dans la formule
    y =kstar*K^(2-betta);
    x = kstar*So^(2-betta)*exp((r*gT)*(2 - betta));//rq --> implémentation apres

    v1 = 2+2/(2 - betta);
    k1 = 2*x;
    v2 = 2/(2 - betta);
    k2 = 2 * y;
    //function res = QQ(t, S, gT, r, K,z,v,k)
    // p1 = So * Q(2*y,v1,k1)- K * exp(-r * gT) * (1-Q(2*x,v2,k2)); // calcul avec phi u-zetc(...)
beta<2
    p=-( So * QQ(2*y,v1,k1)- K * exp(-r * gT) * (1-QQ(2*x,v2,k2))); // calcul avec phi ( 1-... )etc.....
// disp(p); // on affiche celle globale
// disp(p1);
    res = p;
endfunction

```

```

function res = QQ(z,v,k)
res = phi((1-h(v,k)*pq(v,k)*(1-h(v,k)+0.5*(2-h(v,k))*mq(h(v,k))*pq(v,k))-
((v+k)/z)^h(v,k))/(h(v,k)*sqrt(2*pq(v,k)*(1+mq(h(v,k))*pq(v,k)))); // ici on a changé la formule
de delta
endfunction

```

```

function res= phi(x) // intgl -inf à x de e^(-t^2/2)/ sqr(2pi)
res = 0;
if x >= 0 then
res = 1/2 + 1/2 * erf(x/sqrt(2));
else
res = 1/2 - 1/2 * erf((-x)/sqrt(2));
end
endfunction

```

```

function QQ2 = Q(z,v,k)
QQ2=phi((muq(h(v,k),pq(v,k))-(z/(v+k))^h(v,k))/sigmaq(h(v,k),pq(v,k))); // formule avec mu-
z(v+k) etc..
endfunction

```

```

function hhh = h(v,k)
hhh = 1-2/3*(v+k)*(v+3*k)*1/(v+2*k)^2;
endfunction

```

```

function pqq = pq(v,k)
pqq = (v+2*k)/(v+k)^2;
endfunction

```

```

function mqq = mq(u)

```

```

mqq = (u-1)*(1-3*u);
endfunction

```

```

function muqq = muq(u,p)
muqq = 1+u*(u-1)*p -u*(2-u)*mq(u)*p^2/2;
endfunction

```

```

function sigmaqq = sigmaq(u,p)
sigmaqq = u^2*2*p*(1+mq(u)*p);
endfunction

```

```

function res = positif(x)
res=max(x, 0);
endfunction

```

```

function res = iif(a, b, x)
res = x;
if (a) then
res = b;
end
endfunction

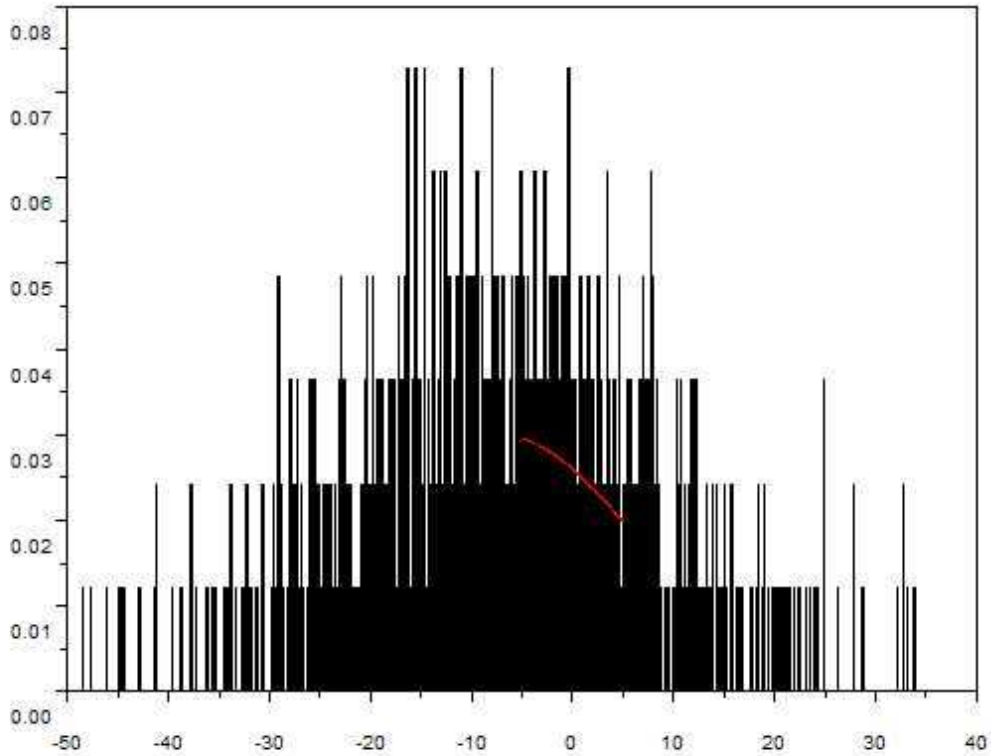
```

```

function [res] = pricer_cevf_statistique(T, strike, r, So, mu, sigma, betta, pas)
maxii = floor(T/pas);
nb = 10000;
nfin = 10000;
vect = zeros(1, nb);
for kk = 1:nb
    oo = 3;
    S = So;
    for i = 1:(maxii)
        if oo >= 0 then
            S = S + S * mu * pas + exp(.5 * betta * log(S)) * sqrt(pas)*sigma*rand(1,1,"normal");
            if (S <= 0) then
                oo = -2;
            end
        end
    end
    vect(1, kk) = max(S-strike, 0);
    if oo < 0 then
        vect(1, kk) = 0;
        nfin = nfin-1;
    end
    if vect(1, kk) > 200 then
        vect(1, kk) = 0;
        nfin = nfin-1;
    end
end;
res = exp(-r * T) * sum(vect(1,:))/nb;
endfunction

```

```
//simuler_cevf(1000, 0.01,1,102, 0.06,100,0.3, 0.3,1 , 1.5)
// courbe simulée pour seulement 1000 valeurs, car le programme reste un peu lent
```



## Prix du Call en fonction (CEV) : 4

Ce programme utilise encore une methode differente des autres : on resoud cette fois numeriquement l equation de portefeuille autofinancant, contrairement au premier programme qui travaille sur la formule explicite.

La resolution numerique est rendue difficile par le type de schema aux differences finies a utiliser pour modeliser une equation aux derivees partielles. Nous avons utilise 2 schemas : un schema explicite et un schema implicite. Aucun des deux n'a marche puisque les matrices associees etaient toujours divergentes.

Il y a des dizaines de manieres differentes d'approcher une equation, et il faut en trouver une associee a une matrice convergente (i.e de norme  $\leq 1$ ). Nous retiendrons cependant la facilite d implementation d une telle methode, ainsi que la vitesse d execution. Elle permet de



calculer delta et le portefeuille en une seule fois, pour chaque instant et de maniere aussi precise qu'on le souhaite.

```

function [res, res2] = approche_delta(dt, dx, T, max2, kk, sig, bet, r)
// bien faire attention a ce que nt/ dx << 1 !!!
nt = floor(T / dt);
nx = floor(max2 / dx);
v = zeros(nx + 1, nt + 1); // dt : nb d intervalles de temps, dx pour St

disp(nt);
disp(nx);

// initialisation

for k = 1:(nx+1)
    s = (k - 1) * dx;
    v(k, nt + 1) = max(0, (s-kk));
end;

A = zeros(nx + 3, nx + 3);
for l = 2:(nx+2) // d abord ligne apres colonne
    x = (l - 2) * dx;
    y = 0;
    if x > 0 then
        y = exp(.5*bet*log(x));
    end
    A(l, l) = 1 + dt * r + dt * sig * sig * y / (dx * dx);
    A(l, l-1) = dt * r*x / (2 * dx) - dt * sig * sig * y / (2*dx * dx);
    A(l, l+1) = -dt * r*x / (2 * dx) - dt * sig * sig * y / (2*dx * dx);
end
l = 1;
A(l, l) = 1 + dt * r + dt;
A(l, l+1) = -dt * r*x / (2 * dx);
l = nx + 3;
x = (l - 2) * dx;
A(l, l) = 1 + dt * r + dt * sig * sig * exp(.5*log(x)) / (dx * dx);
A(l, l-1) = dt * r*x / (2 * dx) - dt * sig * sig * exp(.5*log(x)) / (2*dx * dx);
BBB = A ^ (-1);

vect = zeros(1, nx + 3);
for l = 2:(nx+2)
    vect(l) = v(l-1, nt + 1)
end
vect(1) = 0;
vect(nx + 3) = (nx + 1) * dx;
vect = vect';

for k = 1:nt
    vect = BBB * vect;
    vect(1) = 0;
    vect(nx + 3) = (nx + 1) * dx;
    for l = 2:(nx + 2)

```

```

    v(l-1, nt +1 - k) = vect(l);
    end
end

// calcul de delta = dv/dx

res = zeros(nx + 1, nt + 1);
for k = 1:(nx + 1)
    if ((k-1) * dx < kk) then
        res(k, nt +1) = 0;
    else
        res(k, nt +1) = 1;
    end
end
for k = 1:nt
    kp = nt - k + 1; // on fait en descendant, vu que l on connait v( . , T) et qu on veut aller jusqu a 0
    for l = (k+1):(nx + 1- k)
        res(l, kp) = (v(l+1, kp) - v(l-1, kp))/(2*dx);
    end
end

res2 = v;

endfunction

```

# Annexe 2 : *Modèle d'Heston*

Un autre modèle classique de volatilité est le modèle d'Heston(1993) : un travail identique à celui réalisé sur le modèle CEV peut être fait. Nous ne donnerons ici que les éléments nécessaires à une implémentation machine en vue de simulation.

Heston a considéré le modèle suivant pour une action  $S(t)$  et une variance  $v(t)$ :

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)} S(t) dW_1(t) \\ dv(t) &= \kappa[\bar{v} - v(t)]dt + \delta\sqrt{v(t)} dW_2(t) \\ &\text{avec } dW_1 dW_2 = \rho dt \end{aligned}$$

$\kappa, \delta$  sont des constantes positives, et  $\bar{v}$  représente le terme moyen du processus  $v$ .

le processus pour  $v(t)$  peut-être obtenue en considérant que  $\sqrt{v(t)}$  suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta_0\sqrt{v(t)}dt + \sigma_0 dW_2(t).$$

En appliquant Itô on a:

$$dv(t) = [\delta_0^2 - 2\beta_0v(t)]dt + \delta_0\sqrt{v(t)} dW_2(t)$$

Et on obtient quelque chose de comparable à précédemment

Par analogie avec Blach and Scholes, on peut deviner une solution de la forme :

$$C(S, v, t) = SP_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2$$

En posant

$$x = \ln S$$

$$C(x, v, t) = e^x P_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2$$

Et par différents changements de variables du type :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= e^x \frac{\partial P_1}{\partial t} - rKe^{-r(T-t)}P_2 - Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial t} \\ \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{S} \left[ e^x \frac{\partial P_1}{\partial x} + e^x P_1 - Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

La solution donnée par Heston est la suivante :

$$C(x, v, t) = e^x P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2$$

$$P_j(x, v, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi x} f_j(\phi, v, t)}{i\phi} \right] d\phi$$

$$x = \ln S$$

$$f_j = \exp\{D_0(T-t; \phi) + D_1(T-t; \phi)v + i\phi x\}$$

$$D_0(\tau; \phi) = i\phi r\tau + \frac{a}{\delta^2} \left\{ (b_j - i\phi\rho\delta + d)\tau - 2 \ln \left[ \frac{1 - g e^{-d\tau}}{1 - g} \right] \right\}$$

$$D_1(\tau; \phi) = m_+ \frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - g e^{-d\tau}},$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \sqrt{(b_j - i\phi\rho\delta)^2 - 4 \left( -\frac{\phi^2}{2} + i\phi u_j \right) \left( \frac{\delta^2}{2} \right)} \\ &= \sqrt{(b_j - i\phi\rho\delta)^2 + \delta^2 (\phi^2 - 2i\phi u_j)}. \end{aligned}$$

$$g = \frac{b_j + \rho\delta\phi i + d}{b_j + \rho\delta\phi i - d}$$

$$m_\pm = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} = \frac{\beta \pm d}{\delta^2}$$

$$\alpha = -\frac{\phi^2}{2} + i\phi u_j, \quad \beta = b_j - i\phi\rho\delta, \quad \gamma = \frac{\delta^2}{2}$$

Grâce à cet ensemble d'équations, on peut faire des simulations du même type que celles pour le CEV.

## Annexe 3 : fonctions du $\chi^2$

Soit  $X_1, \dots, X_k$   $k$  variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée et réduite, alors par définition la variable  $X$ , telle que

$$X := \sum_{i=1}^k X_i^2$$

suit une loi du  $\chi^2$  à  $k$  degrés de liberté.

Alors la densité de  $X$  notée  $f_X$  sera:

$$f_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} t^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{pour tout } t \text{ positif}$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma.

L'espérance mathématique de  $X$  vaut  $k$  et sa variance vaut  $2k$ .

## ANNEXE 4: Calcul Esperance

$$\text{erreur} = V - (ST - K) +$$

$$\text{Or } (ST - K) + = \int_0^T \delta \, dSt' \text{ ou } St' = e^{-rt} St$$

D autre part

$$V = \sum \delta t_i \int_t^{t+1} dSt'$$

$$\text{Donc erreur} = \sum \int_t^{t+1} \delta t_i - \delta t \, dSt'$$

On a par ailleurs

$$dSt' = St' ((\mu - r) \, dt + \sigma \, dWt)$$

donc

$$E \text{ erreur} = (r - \mu) \sum \int_t^{t+1} (\delta t - \delta t_i) St' \, dt$$

Calculons  $d((\delta t - \delta t_i) St')$  a l aide de la formule d Ito et de l expression de  $dSt'$   
' calculee precedement

$$\text{On a } \delta t = \Delta(t, St) \text{ donc } d\delta = \sigma S \Delta_x \, dWt + (\mu - r - \sigma^2) St \cdot \Delta_x \, dt$$

On a utilise le fait que le portefeuille est autofinancant et donc

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \left( \frac{d^2}{dx^2} v \right) + rx \left( \frac{d}{dx} v \right) - rv = 0$$

$$\text{et } \Delta = \frac{dV}{dx}$$

Par la formule d Ito pour un produit on obtient donc apres reduction :

$$d((\delta t - \delta t_i) St') = (\mu - r) St' (\Delta_x' St + \delta t - \delta t_i) \, dt + \dots \, dW$$

$$\text{Ainsi } E \int_{\pi}^{\pi+1} (\delta t - \delta t) S^t dt = (\mu - r) \int_{\pi}^{\pi+1} E \int_{\pi}^t S^s (\delta s - \delta t) ds dt + (\mu - r) \int_{\pi}^{\pi+1} E \int_{\pi}^t \Delta x^s S^s ds dt$$

$$\text{En notant } f(x) = E \int_{\pi}^x (\delta t - \delta t) S^t dt \quad \text{et} \quad g(x) = E (\mu - r) \int_{\pi}^x \Delta x^s S^s ds dt$$

$$\text{on obtient } f(x) = (\mu - r) \int_{\pi}^x f(s) ds + \int_{\pi}^x g(s) ds$$

soit, puisque les fonctions sous les integrales sont continues

$$f' = (\mu - r) f + g$$

et donc

$$f = \int_{\pi}^x g(s) e^{(r-\mu)(s-x)} ds$$

$$\text{Comme } g(x) = E (\mu - r) \int_{\pi}^x Ss \frac{e^{-\frac{hs^2}{2}}}{\sigma \sqrt{s}} ds \text{ avec } h(s) = \frac{\log(S)}{\sigma \sqrt{t}} + A \text{ et } A = \frac{1}{2} \sigma \sqrt{t} + \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} (r(T-t) - \log(K))$$

il vient que l'on a une fonction à intégrer de la forme  $e^{-(ax^2 + bx + c)}$  où  $x$  remplace  $\log S$

On peut donc majorer  $g$ , en valeur absolue, par  $\alpha \int_{\pi}^x \frac{ds}{\sqrt{s}}$  où  $\alpha$  dépend continument de  $T$ .

$$\text{et donc } f(x) \leq \beta \frac{\Delta x^2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{ainsi } |E \text{ erreur}| \leq \beta \Delta x^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{h}}$$

et on peut majorer grossièrement  $\Delta x \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{h}}$  par  $\int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}} dt$  et donc par  $2\sqrt{T}$

Finalement,  $|E \text{ erreur}| \leq \gamma \Delta x$  où  $\gamma$  est une fonction continue de  $T$  et  $\Delta x$  est le pas de la simulation

On peut prouver que ( résultat obtenu dans la thèse de Tankov)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{erreur}}{\sqrt{h}} = \int_0^T S^2 \sigma^2 \frac{d^2 C}{dS^2} dW_t \quad \text{ou } W_t \text{ est indépendant de } W_t$$

Ceci confirme que l'erreur tend vers une gaussienne, centrée en 0, et dont la variance tend aussi vers 0.